

Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2021

Профиль «Математика». Тренировочный тур

6-7 класс

1. Из Минска в детский оздоровительный лагерь «Бригантина» выехал автобус с детьми. Когда они проехали 20 км, из Минска на машине выехал Борис и догнал автобус в г.п. Радошковичи. После этого автобус проехал ещё 10 км, а Борис за то же время – 15 км. Найдите расстояние (в км) от Минска до г.п. Радошковичи.
2. Саша, Борис и Сергей играли в настольный теннис "на выбывание" (пока двое играют, третий ожидает своей очереди и затем занимает место проигравшего). Известно, что Борис сыграл в 21 игре, а Саша сыграл в 10 играх. Сколько партий сыграл Сергей (в ответе укажите сумму всевозможных значений)?
3. Саша составляет всевозможные четырехзначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4 (каждую цифру - по одному разу). Сколько построенных чисел делится на 11?
4. За 30 дней работы Сергею обещали заплатить 600 рублей и 1 золотую монету. Он работал всего 10 дней и получил только золотую монету. При этом ему объяснили, что золото подорожало вдвое. Сколько рублей стоила золотая монета на момент увольнения Сергея?
5. Прямоугольник разбили прямыми параллельными его сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них указаны на рисунке, а площади x и y неизвестны. Найдите x и y (в ответ запишите сумму всевозможных значений x и y).
6. В стране четыре города, из каждого выходит нечетное количество дорог (любые два города могут быть связаны не более чем одной дорогой). Сколько дорог может быть в таком государстве? (Укажите сумму всевозможных значений, которые может принимать количество дорог в указанной стране.)

y		34	27	42
	121			132
40	55			x

Решения

1. Из Минска в детский оздоровительный лагерь «Бригантина» выехал автобус с детьми. Когда они проехали 20 км, из Минска на машине выехал Борис и догнал автобус в г.п. Радошковичи. После этого автобус проехал ещё 10 км, а Борис за то же время – 15 км. Найдите расстояние (в км) от Минска до г.п. Радошковичи.

Ответ: 60 км.

Решение. Поскольку за одно и то же время автобус проезжает 10 км, а Борис 15 км, то скорость машины в $15 / 10 = 1,5$ раза больше скорости автобуса. Пусть скорость движения автобуса v км/ч, тогда $1,5v$ км/ч – скорость движения Бориса. Отставая на

20 км, Борис догнал автобус за $\frac{20}{1,5v - v} = \frac{20}{0,5v} = \frac{40}{v}$ ч (движение «друг за другом»),

а общее расстояние от Минска до Радошковичей равно $\frac{40}{v} \cdot 1,5v = 60$ км.

2. Саша, Борис и Сергей играли в настольный теннис «на выбывание» (пока двое играют, третий ожидает своей очереди и затем занимает место проигравшего). Известно, что Борис сыграл в 21 игре, а Саша сыграл в 10 играх. Сколько партий сыграл Сергей (в ответе укажите сумму всевозможных значений)?

Ответ: 11.

Решение. Заметим, что при указанной игре «на выбывание» Саша сыграл хотя бы раз в каждой двух последовательных партиях. Следовательно, всего игр не более $2 \cdot 10 + 1 = 21$. Это означает, что Борис сыграл в каждой партии, поочередно обыгрывая Сашу и Сергея, поэтому Сергей провел 11 партий.

3. Саша составляет всевозможные четырехзначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4 (каждую цифру - по одному разу). Сколько построенных чисел делится на 11?

Ответ: 8.

1-е решение. Задачу можно решать полным перебором: из 24 вариантов чисел выберем те, которые делятся на 11. Получим числа: 1243, 1342, 2134, 2431, 3124, 3413, 4213, 4312.

2-е решение. Воспользуемся признаком деления на 11 (число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на четных позициях минус сумма цифр, стоящих на нечетных позициях делится на 11). Заметим, что если первая цифра 1 (разряд тысяч), то в разряде десятков обязательно стоит 4 (и наоборот!). Тогда для расстановки остальных цифр есть два варианта: 1243 и 1342. Аналогично, если в разряде тысяч стоит 2, 3 или 4.

4. За 30 дней работы Сергею обещали заплатить 600 рублей и 1 золотую монету. Он работал всего 10 дней и получил только золотую монету. При этом ему объяснили, что золото подорожало вдвое. Сколько рублей стоила золотая монета на момент увольнения Сергея?

Ответ: 240 монет.

Решение. Если бы Сергей работал все 30 дней, то получил бы 3 золотых монеты в новой стоимости. Это равно стоимости шести старых монет, значит 600 рублей – это

стоимость пяти старых монет. Поэтому на момент приема на работу Сергея одна золотая монета стоила 120 рублей, а на момент увольнения – 240 рублей.

5. Прямоугольник разбили прямыми параллельными его сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них указаны на рисунке, а площади x и y неизвестны. Найдите x и y (в ответ запишите сумму всевозможных значений x и y).

y		34	27	42
	121			132
40	55			x

Ответ: 88.

Решение. Заметим, что площадь прямоугольника, отмеченного числом 121, относится к площади прямоугольника, отмеченного числом 55, так же, как 132 относится к числу x , т.е. $\frac{121}{55} = \frac{132}{x}$, откуда $x=60$. Аналогично $\frac{y}{40} = \frac{42}{x}$ или $\frac{y}{40} = \frac{42}{60}$, откуда $y=28$. В ответ пишем $x+y=88$.

6. В стране четыре города, из каждого выходит нечетное количество дорог (любые два города могут быть связаны не более чем одной дорогой). Сколько дорог может быть в таком государстве? (В ответе укажите сумму всевозможных значений, которые может принимать количество дорог в указанной стране).

Ответ: 11.

Решение. Так как в стране всего 4 города, то из каждого может выходить либо три дороги, либо одна.

Если в стране нет городов из которых выходит три дороги, то получаем государство, изображенное на рис.1.

Если в стране ровно один город, из которого выходит три дороги, получаем государство, изображенное на рис.2.

Если в стране хотя бы два города, из которых выходит по три дороги, получаем конструкцию, изображенную на рис.3. Тогда из двух оставшихся городов тоже должно выходить по три дороги (рис.4). Таким образом, в описанной стране может быть 2, 3 или 6 дорог.

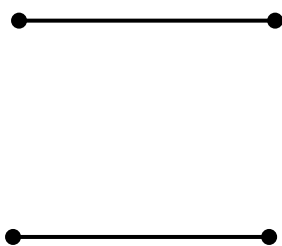


Рис.1

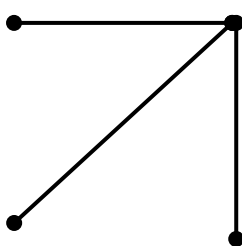


Рис.2

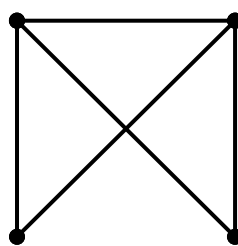


Рис.3

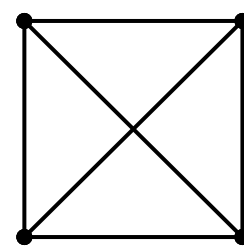


Рис.4