

**Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2021**  
**Профиль «Математика»**

**Отборочный тур – 3 октября**

**4 класс**

1. Какую цифру нужно зачеркнуть в числе 3 425 697 108, чтобы полученное после этого число было наименьшим из возможных? Попробуйте ответ объяснить.

**Решение.** Если зачеркнуть цифру 3, то число будет начинаться с 4, а, значит, будет больше чем число, начинающееся с 3. Значит, цифру 3 оставляем. Чтобы число было наименьшим его вторая цифра должна быть наименьшей. Из двух подряд идущих цифр 4 и 2 надо вычеркнуть 4. Тогда полученное число будет наименьшим. Вычеркивание следующих цифр не влияет на значение первых двух цифр получающегося числа.

**Ответ:** надо вычеркнуть 4.

2. а) Оксана нашла один гриб, Катя – два гриба, а Наташа — три. Мама дала им 18 конфет и предложила разделить их по заслугам. Сколько конфет должна получить каждая девочка?

б) Оксана нашла три гриба, Катя – четыре, Наташа — пять. Мама дала им 36 конфет и предложила разделить их по заслугам. Сколько конфет должна получить каждая девочка?

**Решение.** а) Заметим, что всего девочки собрали 6 грибов. Значит за каждый гриб девочка должна получить  $18:6=3$  конфеты. Тогда Оксана получит 3 конфеты, Катя  $2*3=6$  конфет, а Наташа –  $3*3=9$  конфет

б) Аналогично Оксана получит 9 конфет, Катя – 12 конфет, а Наташа – 15 конфет.

**Ответ.** а) Оксана получит 3 конфеты, Катя 6 конфет, а Наташа 9 конфет

б) Оксана получит 9 конфет, Катя 12 конфет, а Наташа 15 конфет.

3. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \times 6 * \\ \hline * * \\ + * * \\ \hline * * 6 \end{array}$$

а) В ответе запишите результат произведения.

б) Сколько вариантов решений имеет задача? Объясните почему.

**Решение.** Перепишем условие задачи так:  $\overline{ba} \cdot \overline{vc} = **6$ . Так как  $a*c$  оканчивается на 6 и является двузначным числом, то  $c < 2$ , а значит единственный возможный вариант  $c=1$  и  $a=6$ . Тогда так как  $\overline{66} \cdot \overline{v} = **$ , то  $v < 2$ , а значит единственный возможный вариант  $v=1$ . Описанные выше рассуждения показывают, что решение единственное.

**Примечание.** Заметим, что подобное рассуждение могло быть проведено без введения неизвестных  $a, b, c$ . При этом во втором сомножителе в разряде единиц может стоять только 1 (в противном случае результат умножения первого сомножителя на цифру единиц был бы трехзначным). Тогда первый сомножитель может быть равен только 66, а второй – 11.

Все цифры в сомножителях определяются однозначно – отсюда единственность решения.

**Ответ.** А) 726, б) одно решение.

4. Встретились пять черепашек-ниндзя и поздоровались за руки (каждая черепашка пожалала руку каждой из остальных по одному разу). Всего они сделали 10 рукопожатий.

Сколько рукопожатий при встрече сделают 10 черепашек-ниндзя. Объясните, как Вы считали.

**Решение.** Если каждая черепашка пожалала руку 9 оставшимся, то всего было сделано  $10*9:2=45$  рукопожатий (делить на 2 обязательно т.к. если черепашка А жмёт руку черепашке Б, то умножив  $10*9$  мы посчитали бы одно и то же рукопожатие дважды).

**Примечание.** Количество рукопожатий можно было посчитать и по-другому. Выберем одну из черепашек и заметив, что она сделала 9 рукопожатий (со всеми остальными), далее будем поступать так: выбрав следующую черепашку, скажем, что она сделала 8 рукопожатий с оставшимися, если не считать рукопожатие с первой выбранной. Для третьей черепашки получится уже 7 рукопожатий и т.д. Таким образом, всего будет  $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$  рукопожатий.

**Ответ.** Было сделано 45 рукопожатий.

5. На одной из двух шкатулок написана правда, а на другой — ложь.

1-я шкатулка: «В этой шкатулке находится сладкая конфета, а в другой шкатулке – горькая микстура.»

2-я шкатулка: «В одной из этих шкатулок находится сладкая конфета; кроме того, в одной из этих шкатулок есть горькая микстура.»

В какой шкатулке лежит конфета? Ответ поясните.

**Решение.** Если надпись на первой шкатулке верна, то и надпись на второй шкатулке тоже верна, а это противоречит условию. Значит надпись на первой шкатулке – ложь. Значит надпись на шкатулке 2 правдивая и в ней лежит сладкая конфета.

**Ответ.** Конфета лежит во второй шкатулке.

6. а) Навстречу друг другу мчатся две машины: одна со скоростью 60 км/ч, другая – 120 км/ч. Какое расстояние будет между ними за 2 часа до встречи?

б) Какое расстояние будет между машинами за 1 минуту до встречи?

**Решение.** а) За 2 часа 1-я машина пройдёт 120 км, а 2-я – 240 км. Всего за 2 часа вместе они проедут путь, равный 360 км.

б) Так как 1 минута в  $2 \cdot 60 = 120$  раз меньше чем 2 часа, то и машина проедет в 120 раз меньше  $360 : 120 = 3$  км.

**Ответ.** а) 360 км; б) 3 км.

# Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2021

## Профиль «Математика»

### Отборочный тур – 3 октября

#### **5 класс**

1. В равенстве, записанном ниже, вместо некоторой цифры записана буква F. Чему равна цифра, вместо которой записана буква F?

$$2F5 - 3F + F9 = 31F.$$

Ответ объясните.

**Первое решение.** Заметим, что  $\overline{авс} = 100 \cdot а + 10 \cdot в + с$ . Перепишем условие задачи

$$(200+10F+5)-(30+F)+(10F+9)=300+10+F. \text{ Откуда } 18F=126 \text{ или } F=7.$$

**Второе решение.** Заметим, что задачу можно было решать, записав условие в столбик и подбирая цифру F. При этом достаточно было заметить, что в разряде единиц будет стоять  $5 - F + 9 = F$ , откуда сразу следует, что  $F=7$ , а затем осуществить проверку.

**Ответ.** **F=7.**

2. а) Оксана нашла три гриба, Катя – четыре, Наташа — пять. Мама дала им 36 конфет и предложила разделить их по заслугам. Сколько конфет должна получить каждая девочка?

б) Оксана нашла пять грибов, Катя – шесть, Наташа — семь. Мама дала им 54 конфеты и предложила разделить их по заслугам. Сколько конфет должна получить каждая девочка?

**Решение.** а) Заметим, что всего девочки собрали 12 грибов. Значит за каждый гриб девочка должна получить  $36:12=3$  конфеты. Тогда Оксана получит 9 конфет, Катя  $4 \cdot 3=12$  конфет, а Наташа –  $5 \cdot 3=15$  конфет.

б) Аналогично Оксана получит 15 конфет, Катя – 18 конфет, а Наташа – 21 конфету.

**Ответ.** а) Оксана получит 9 конфет, Катя 12 конфет, а Наташа 15 конфет.

б) Оксана получит 15 конфет, Катя – 18 конфет, а Наташа 21 конфету.

3. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \times \quad * 2 * \\ \quad * 7 \\ \hline + \quad * * * \\ \quad * * * * \\ \hline * * * * 8 \end{array}$$

а) В ответе запишите результат произведения.

б) Сколько вариантов решений имеет задача? Объясните почему.

**Решение.** Перепишем условие задачи так:  $\overline{a2b} \cdot \overline{c7} = \overline{****8}$ . Так как  $b \cdot 7$  оканчивается на 8, и  $\overline{a2b} \cdot 7$  является трехзначным числом, то единственный возможный вариант  $a=1$  и  $b=4$ , а значит  $b=1$  и  $a=6$ . Тогда  $\overline{124} \cdot \overline{c7} = \overline{****8}$ . Так как  $\overline{124} \cdot c$  – четырехзначное число и  $\overline{124} \cdot 8 = 992$ , то  $c=9$  и  $\overline{124} \cdot 9 = 1116$ . Описанные выше рассуждения показывают, что решение единственное.

**Примечание.** Заметим, что подобное рассуждение могло быть проведено без введения неизвестных  $a, b, c$ . При этом в первом сомножителе в разряде единиц может стоять только 4 (иначе последняя цифра произведения не равна 8), а в разряде сотен только 1 (иначе при умножении на 7 получится 4х-значное число). Точно так же во втором сомножителе в разряде десятков должна стоять цифра 9 (ибо при умножении на 8 будет трехзначное число).

Все цифры в сомножителях определяются однозначно – отсюда единственность решения.

**Ответ:** а) 12028, б) одно решение.

4. Встретились пять черепашек-ниндзя и поздоровались за руки (каждая черепашка пожалала руку каждой из остальных по одному разу). Всего они сделали 10 рукопожатий.

а) Сколько рукопожатий при встрече сделают 10 черепашек-ниндзя (вновь каждая пожалала руку каждой из остальных по одному разу). Объясните, как Вы считали.

б) Встретились несколько черепашек-ниндзя, и каждая пожалала руку каждой другой. Сколько черепашек-ниндзя встретилось, если известно, что всего рукопожатий было больше 56 и меньше 70? Ответ объясните.

**Решение.** а) Если каждая черепашка пожалала руку 9 оставшимся, то всего было сделано  $10 \cdot 9 : 2 = 45$  рукопожатий (делить на 2 обязательно т.к. если черепашка А жмёт руку черепашке Б, то умножив  $10 \cdot 9$  мы посчитали бы одно и то же рукопожатие дважды).

б) Аналогично, если черепашек было 11, то рукопожатий было сделано  $11 \cdot 10 : 2 = 55$ . Если же черепашек было 12, то рукопожатий было сделано  $12 \cdot 11 : 2 = 66$ . Если же черепашек было 13, то рукопожатий было сделано  $13 \cdot 12 : 2 = 78$ . Заметим, что  $56 < 66 < 70$ . Таким образом, мы нашли и обосновали единственный верный ответ – было 12 черепашек.

**Примечание.** Количество рукопожатий можно было посчитать и по-другому. В частности, в пункте а) будем поступать так. Выберем одну из черепашек и заметив, что она сделала 9 рукопожатий (со всеми остальными), далее будем поступать так: выбрав следующую черепашку, скажем, что она сделала 8 рукопожатий с оставшимися, если не считать рукопожатие с первой выбранной. Для третьей черепашки получится уже 7 рукопожатий и т.д. Таким образом, всего будет  $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$  рукопожатий.

**Ответ.** а) было сделано 45 рукопожатий; б) 12.

5. В одной шкатулке находится горькая микстура, в другой сладкая конфета, а третья шкатулка пуста. Надпись на шкатулке, где находится конфета, истинна; надпись на шкатулке, в которой находится горькая микстура, ложна, а то, что написано на пустой шкатулке, может оказаться как истинным, так и ложным.

I шкатулка: «Эта шкатулка пуста.»

II шкатулка: «В шкатулке III горькая микстура.»

III шкатулка: «Шкатулка I пуста.»

В какой шкатулке лежит конфета? Ответ поясните.

**Решение.** Заметим, что 1 и 3 говорят одно и то же. Пусть они обе истинны. Тогда 1 шкатулка пуста, а в 3 не может быть микстуры, значит, там конфета. Тогда во 2 микстура и всё хорошо. Если и 1, и 3 ложны: тогда в 1 что-то есть, раз там ложная надпись, значит, микстура. Значит, 3 пуста. Значит, на 2 тоже ложная надпись, противоречие. Получается, в 1 пусто, во 2 микстура, в 3 конфета.

**Ответ.** Конфета лежит в третьей шкатулке.

6. а) По шоссе одна задругой мчатся две машины: передняя – медленная со скоростью 30 км/ч, задняя – быстрая со скоростью 120 км/ч. Задняя машина догнала переднюю ровно в 12 часов дня. Какое расстояние было между ними в 11 час. 50 мин.?

б) Какое расстояние было между машинами за 1 минуту до встречи?

**Решение.** а) За 1 час быстрая машина проезжает 120 км. Тогда за 10 минут= $\frac{1}{6}$  часа эта машина проедет 20 км. За 1 час медленная машина проезжает 30 км. Тогда за 10 минут= $\frac{1}{6}$  часа эта машина проедет 5 км. Тогда расстояние между машинами было  $20-5=15$  км.

б) Так как 1 минута в 10 раз меньше 10 минут из пункта а), то и расстояние между машинами было в 10 раз меньше  $1,5\text{км}=1500\text{м}$ .

**Ответ.** а) 15 км; б) 1500 м.