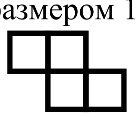
СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **Весенний тур**

6-7(5) кл., сложный вариант 10 марта 2024 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы	***Задачи***
3	1. Сможете ли Вы расставить числа 0, 3, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 20 в клетки таблицы 3×3 (каждое по одному разу и в свою клетку) так, чтобы все суммы чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце были равны между собой? Если – да, то покажите как, если – нет, то обоснуйте это.
4	2. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *O*. Оказалось, что углы $\angle OAB$, $\angle OBA$, $\angle OBC$, $\angle OCA$ равны между собой, а $\angle OAC = \angle OCB$. Найдите углы исходного треугольника.
6	3. На конном заводе проводили соревнования: нужно за наименьшее время подковать 30 лошадей. В одной из бригад для этого имелось 24 кузнеца. Известно, что каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Предложите порядок действий, чтобы выполнить задание. При этом помните, нужно не только найти минимально возможное время, но указать, как нужно для этого действовать. (И еще помните, что лошадь не может стоять на двух ногах.)
8	4. Буратино, лиса Алиса и кот Базилио нашли клад, в котором были золотые, серебряные и медные монеты. Буратино рассказал о находке следующее: количество медных монет не менее 16 монет, а общее количество монет в кладе не более 29. Алиса сказала, что число золотых монет ближе к 1/8, чем к 1/9 от общего числа монет. Базилио сказал, что число золотых монет ближе к 1/8, чем к 1/7 от общего числа монет. Сколько всего монет в кладе? (Ответ обоснуйте. При этом помните, что все в этой задаче говорят правду.)
10	5. На поле для игры в морской бой размером 10 × 10 расположен корабль следующей формы:  Какое наименьшее число выстрелов необходимо произвести, чтобы гарантированно ранить этот корабль? Ответ обоснуйте.
1 **2** **3** **5**	6. Имеются три числа. За один ход разрешается прибавить к любым двум числам по единице или вычесть из любых двух чисел по единице. Можно ли за несколько операций из чисел 1, 2, 3 получить тройку: А) 5, 13, 4? Б) 6, 9, 16? В) Как по двум наборам понять, можно ли получить из первого второй или нет? (Предложите соответствующие условия и обоснуйте их.) Г) В каждой вершине правильного шестиугольника записано по целому числу. За один ход разрешается прибавить по единице к любым двум числам или вычесть по единице из любых двух чисел, записанных в вершинах «через одну». Как понять, можно ли из одного набора чисел, записанного в вершинах шестиугольника, получить другой набор? (Предложите соответствующие условия и обоснуйте их.)
3 **4** **5**	7. А) Петя и Вася выставили на длинную клетчатую полоску 10 фишек. Петя посчитал количество пар среди этих фишек таких, что между ними находится нечетное число других фишек, а Вася посчитал количество пар фишек таких, что между ними находится четное число других фишек. (Любая фишка может входить в разные пары фишек, которые считают мальчики; число 0 является четным). Петя сказал, что у него получилось больше пар, чем у Васи. Прав ли он? Ответ объясните. Б) Тот же вопрос, для случая, когда Петя и Вася поставили на клетчатую полоску *N* фишек (где *N* – некоторое натуральное число, большее 10). В) Тот же вопрос, но теперь Петя и Вася ставят *N* различных точек в квадрате 10×10, и считают соответствующие пары точек так, чтобы нечетное или четной число точек лежало на отрезке их соединяющем (квадрат «неклетчатый» и точки можно ставить, где угодно).

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

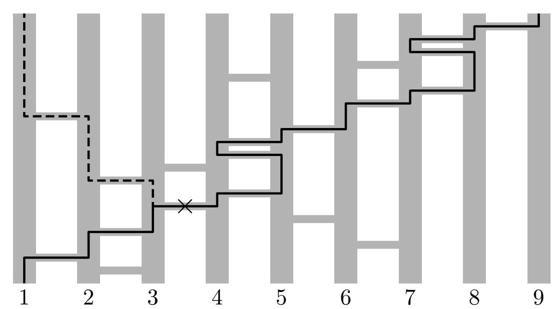
4 1. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

5 2. Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

7 3. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

7 4. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?

9 5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике. Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползёт по пунктирной линии.)



10 6. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N — середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q — середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.

12 7. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

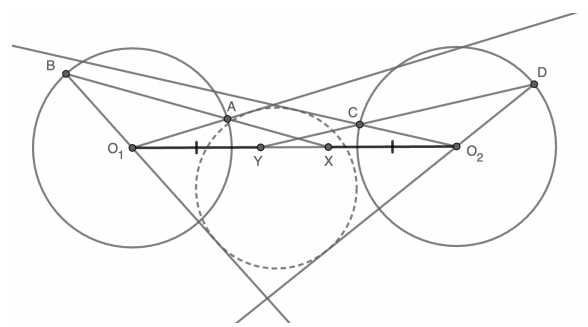
баллы задачи

4 1. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же чётность, что m. Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$).

6 2. В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг?

7 3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C *хорошей*, если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C, а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C. Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?

8 4. Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1Y = O_2X$. Точки A и B лежат на ω_1, и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2, и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2.



10 5. Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2.

12 6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

12 7. Назовём *полоской* клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях — вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор $(-1, 1)$. Докажите, что для любой полоски, состоящей из чётного числа клеток, найдётся такое нечётное k, что если объединить k таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке приведён пример.)