

# СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЕСЕННЕГО ТУРА

### СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. Число  $2021 = 43 \cdot 47$  составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.

*Михаил Евдокимов*

**Решение.** Разность двух таких чисел, в которых число восьмёрок различается на 1, имеет вид  $1880 \dots 0$ . Но  $188 = 47 \cdot 4$ , то есть делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмёрки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

2. В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

*Максим Дидин*

**Решение.** Деление с остатком кучи конфет на  $k$  детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на  $k$  кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

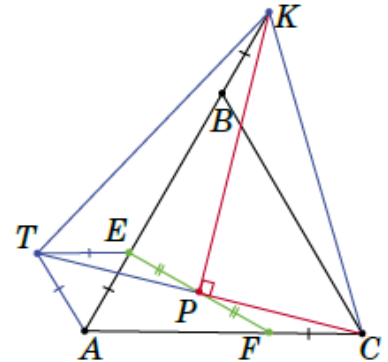
Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

Когда найдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

3. Треугольник  $ABC$  равносторонний. На сторонах  $AB$  и  $AC$  выбрали точки  $E$  и  $F$ , а на продолжении стороны  $AB$  — точку  $K$  так, что  $AE = CF = BK$ . Точка  $P$  — середина  $EF$ . Докажите, что угол  $KPC$  прямой.

*Владимир Расторгуев*

**Решение.** На продолжении отрезка  $CP$  за точку  $P$  отметим такую точку  $T$ , что  $CP = PT$ . Тогда  $FCET$  — параллелограмм, откуда  $TE$  равно и параллельно  $FC$ . Но тогда треугольники  $TEK$  и  $KBC$  равны по первому признаку: тупые углы у них равны  $120^\circ$  и соответствующие стороны при этих углах равны. Следовательно, треугольник  $TKC$  равнобедренный и его медиана  $KP$  является высотой.



4. Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

*Александр Грибалко*

**Ответ:** всегда.

**Решение 1.** Выберем любого аборигена — будем называть его Петей, — и покажем, как найти его возраст. Мысленно наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, ..., 24, 25.

Заметим, что каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, ..., 25-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, ..., 24-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

**Решение 2.** Для удобства будем считать, что в круге стоят через одного 25 мужчин и 25 женщин. Покажем, как различить мужчин (женщины определяются аналогично). Заметим, что два высказывания о возрасте одной женщины отличаются на 1 тогда и только тогда, когда ее соседи — рыцарь и лжец. Поэтому достаточно опознать одного мужчину: далее по кругу определяются все остальные.

Разберём два случая.

1) Для одной из женщин высказывания об её возрасте различаются на 2. Тогда оба её соседа — лжецы, и, как сказано выше, все мужчины определяются.

2) Таких женщин нет. Все мужчины разбиваются на группы: внутри такой группы оба соседа каждой женщины говорят об её возрасте одно и то же. Но пока не известно, какие группы состоят из лжецов, а какие — из рыцарей.

Сложив все числа, названные мужчинами, получим удвоенную сумму возрастов женщин. Теперь сложим первые числа, названные мужчинами. Если полученная сумма имеет ту же чётность, что сумма возрастов женщин, то среди мужчин чётное число лжецов, а если не совпадает — нечётное. Поскольку из двух возможных вариантов количество лжецов чётно только в одном, путешественник определит, какой из вариантов правильный.

*Вариация.* Присвоим женщине, стоящей между такими группами знак «+» («-»), если её сосед слева заявляет, что её возраст на 1 больше (меньше), чем говорит сосед справа. Заметим, что знаки на границах группы из чётного (нечётного) числа лжецов совпадают (различны). Следовательно, если среди 25 мужчин количество лжецов чётно (нечётно), то и общее количество плюсов чётно (нечётно). Тем самым, зная количество плюсов, путешественник определит чётность количества лжецов.

**5.** В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника  $M$  расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

- а) [4]  $M$  — квадрат  $21 \times 21$ ;  
б) [4]  $M$  — прямоугольник  $20 \times 21$ ?

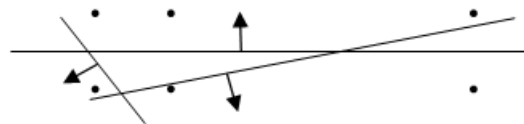
Александр Шаповалов

**Ответы:** а) 3 хода; б) 4 хода.

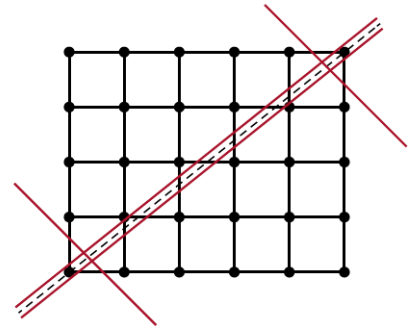
**Решение.** Вместо исходного прямоугольника  $M$  будем рассматривать прямоугольник  $N$  с вершинами в угловых лампочках.

*Оценки.* Заметим, что каждым ходом зажигается хотя бы одна из четырёх угловых лампочек. Следовательно, ходов не больше 4. В п. а) заметим ещё, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведённой прямой окажется хотя бы две угловых лампочки (поскольку прямая, параллельная проведённой и проходящая через центр, делит квадрат  $N$  пополам).

*Примеры.* а) Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем зажигаем все из оставшихся лампочек, кроме угловой, и наконец зажигаем угловую лампочку. (На рисунке изображены два нижних слоя лампочек, стрелки указывают по какую сторону от прямой зажигаются лампочки.)



б) Прямоугольник  $N$  имеет размеры  $19 \times 20$ . На его диагонали нет других лампочек, поскольку 19 и 20 взаимно просты. Проведём первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой. Аналогично проведём вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжём все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. (Для примера мы взяли  $N$  размером  $4 \times 5$  — поменьше, но тоже с взаимно простыми сторонами.) Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.



6. В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера  $1, 2, \dots, n$ , из которых  $k$  на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого  $k$  укажите наименьшее  $n$ , при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлёв

**Ответ:**  $n = 100(m + 1)$  при  $k = 2m$  и  $n = 100(m + 1) + 1$  при  $k = 2m + 1$ .

**Решение.** Пусть  $k = 2m$  или  $k = 2m + 1$ .

*Алгоритм.* Мысленно разделим номера на 100 участков по  $m + 1$  номеров, а в случае нечётного  $k$  оставшийся номер объявим запасным. Пусть  $i$ -й турист сначала проверяет все номера  $i$ -го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера  $(i + 1)$ -го участка, но справа налево (если  $i = 100$ , проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего  $k + 2$  номера.

*Оценка.* Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из  $k + 1$  различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

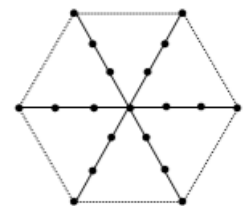
Рассмотрим для каждого туриста первые  $m + 1$  номеров из его списка. Все эти  $100(m + 1)$  чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше  $m + m = 2m$ , все на ремонте). Следовательно,  $n \geq 100(m + 1)$ .

При чётном  $k$  этой оценки достаточно. В случае нечётного  $k$ , если у какого-то туриста, скажем, Пети,  $(m + 2)$ -й номер совпадает с каким-то из  $100(m + 1)$  «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые  $m + 1$  номеров, а у Васи — первые  $m$  будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все  $(m + 2)$ -е номера отличны от  $100(m + 1)$  первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть  $n \geq 100(m + 1) + 1$ .

**Замечание.** Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном  $k$  мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери  $k + 2$  номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более  $k$  ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном  $k$  представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по  $k + 2$  номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и  $k = 5$ ). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил  $\frac{k+1}{2}$  ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



7. [12] Пусть  $p$  и  $q$  — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на  $p$  вправо, либо на  $q$  влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального  $d < p+q$  найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на  $d$ .

Николай Белухов

**Решение 1.** Случай  $p = q = 1$  очевиден. Иначе  $p$  и  $q$  различны, пусть  $p < q$ . Всего лягушка пропрыгала путь, длина которого делится на  $p$  и на  $q$ , а значит, и на  $pq$ , так как  $p$  и  $q$  взаимно просты. Тогда длина пути равна  $kpq$  для некоторого натурального  $k$ , и лягушка сделала  $kq$  «коротких» прыжков вправо и  $kp$  «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых  $p$  и  $q$  можно представить  $d$  в виде  $d = ap - bq$  с целыми  $a$  и  $b$ . Это равенство, очевидно, сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить)  $a$  на  $q$  и  $b$  на  $p$ . Поэтому можно выбрать  $a$  натуральным и не превосходящим  $q$ . При этом  $b$  будет неотрицательным (иначе  $d \geq p+q$ ), и так как  $a \leq q$ , то  $b < p$  (ведь  $d > 0$ ). Поэтому  $a + b < p + q \leq k(p + q)$ .

Назовём каждую серию из  $a + b$  последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идёт её первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно  $k(p + q)$  штук.

Надо найти окно, где лягушка сделала ровно  $a$  коротких прыжков (и  $b$  длинных) — тогда она сдвинется на  $d$  за эти  $a + b$  прыжков. Такое окно найдётся, если есть окно, где коротких прыжков не менее  $a$ , и окно, где их не более  $a$ : можно сдвигать первое окно по кругу, пока не дойдём до второго, число коротких прыжков в окне каждый раз меняется максимум на 1, поэтому будет момент, когда оно равно  $a$ .

Сложим число коротких прыжков во всех окнах — получим  $kq(a + b)$ , ведь каждый прыжок учли  $a + b$  раз. Окон  $k(p + q)$ , и в среднем на окно придётся  $\frac{kq(a+b)}{k(p+q)}$  коротких прыжков. Это число равно

$$\frac{kq(a + b)}{k(p + q)} = \frac{qa + qb}{p + q} = \frac{pa + qa - d}{p + q} = a - \frac{d}{p + q},$$

что больше  $a - 1$  и меньше  $a$ . Значит, найдётся окно, где коротких прыжков не менее  $a$ , и окно, где их не более  $a$ .

**Решение 2.** Лягушку из условия назовём *старой*. Будем считать, что она пропрыгивает свою последовательность ходов бесконечное число раз по циклу. Посадим на прямую *новую* лягушку в точку  $d$  и заставим её прыгать ту же последовательность прыжков, что прыгает старая (тоже в бесконечном цикле).

Множество чисел, посещённых новой лягушкой, получается из множества чисел, посещённых старой, сдвигом на  $d$ . Если хотя бы одно число из нового множества совпадет с числом из старого, то обратный сдвиг даст нам искомую пару чисел. Предположим, что этого не произойдёт.

Как и в предыдущем решении, представим число  $d$  в виде  $ap - bq$  для некоторых неотрицательных  $a$  и  $b$ . Заставим старую лягушку пропрыгать  $a + b$  ходов по её циклу; она окажется в точке  $e = xp - yq$ , где  $x + y = a + b$ . Так как  $a - x = y - b$ , разность координат новой и старой лягушек кратна  $p + q$ :  $d - e = (a - x)p - (b - y)q = (a - x)(p + q)$ .

Далее пусть лягушек прыгать одновременно: старую по продолжению исходной траектории, а новую — по сдвинутой. На каждом шаге разность их координат будет либо не меняться (если они прыгают в одну сторону), либо меняться на  $p + q$  (если одна прыгает на  $+p$ , а другая на  $-q$ ). Таким образом, разность всегда будет оставаться кратной  $p + q$ ; при этом она, по предположению, не может становиться нулевой, поэтому она всегда будет сохранять знак.

Пусть лягушки пропрыгали полный цикл и вернулись (новая в  $d$ , а старая в  $e$ ). Количество ходов в цикле обозначим через  $T$ . Сумму всех чисел, посещённых новой лягушкой (без учёта начальной позиции), обозначим через  $S_1$ , а сумму чисел, посещённых старой, — через  $S$ . С одной стороны, числа на соответствующих ходах отличались не менее чем на  $p + q$ , причём разность всегда имела один и тот же знак, поэтому  $|S_1 - S| > T(p + q)$ . С другой стороны, набор чисел, посещённых новой лягушкой за цикл, отличается от аналогичного набора старой лягушки сдвигом на  $d$ , поэтому  $|S_1 - S| = Td$  (отметим, что эти наборы могут содержать некоторые числа по несколько раз, если в течение цикла лягушка посещала их неоднократно). Подставляя и сокращая на  $T$ , получаем  $d > p + q$ , что противоречит условию задачи.

**Решение 3.** Как и в решении 2, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением  $d = ap - bq$  для неотрицательных  $a$  и  $b$ , сумму  $a + b$  обозначив через  $r$ .

Через  $\delta_i$  обозначим разность между положениями лягушки в момент  $i + r$  (то есть через  $i + r$  шагов после начала) и в момент  $i$ . Так как их разделяет  $r$  шагов, то

$$\begin{aligned}\delta_i &= xp - (r - x)q = ap + (x - a)p - bq - (r - x - b)q = \\ &= d + (x - a)p + (x - (r - b))q = d + (x - a)(p + q).\end{aligned}$$

Если  $\delta_i$  равно  $d$ , то мы нашли искомые позиции. Предположим противное, пусть  $\delta_i \neq d$  для всех  $i$ . Тогда все числа  $\delta_i$  имеют вид  $d + (p + q)k_i$  для целых  $k_i \neq 0$ .

Заметим, что разность между  $\delta_i$  и  $\delta_{i+1}$  определяется тем, какими были  $(i + 1)$ -й и  $(i + r + 1)$ -й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна  $\pm(p + q)$  или 0. Это означает, что числа  $\delta_i$  либо все меньше 0, либо все больше 0.

Рассмотрим позицию лягушки через  $rT$  шагов, где  $T$  — количество шагов в её цикле. С одной стороны, она равна сумме  $\delta_0 + \delta_r + \delta_{2r} + \dots + \delta_{r(T-1)}$ , которая по доказанному выше должна быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через  $rT$  шагов лягушка вернётся на позицию 0. Противоречие.

## 10 – 11 классы

1. [4] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

*Максим Дидин*

**Решение.** Деление с остатком кучи конфет на  $k$  детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на  $k$  кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

2. [5] Существует ли такое натуральное  $n$ , что для любых вещественных чисел  $x$  и  $y$  найдутся вещественные числа  $a_1, \dots, a_n$ , удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \dots + a_n \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}?$$

*Артемиий Соколов*

**Ответ:** существует.

**Решение 1.** Докажем, что подходит  $n = 6$ . Предварительно заметим, что любую пару  $(0, y)$  с ненулевым  $y$  можно получить так:  $0 = \frac{3}{2y} + \frac{3}{2y} - \frac{3}{y}$ ,  $y = \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{y}{3}$ . Аналогично можно получить любую пару  $(x, 0)$  с ненулевым  $x$ . Тогда любую пару  $(x, y)$  с отличными от нуля  $x$  и  $y$  можно получить как «сумму» двух рассмотренных выше пар. Пару  $(x, 0)$  можно получить как сумму двух пар  $(\frac{x}{2}, 0)$ , а пару  $(0, 0)$  — как  $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1$ .

**Решение 2.** Докажем, что подходит  $n = 4$ . Заметим, что если мы зафиксируем положительное число  $k$  и рассмотрим все возможные пары положительных чисел  $a, b$  с суммой  $k$ , то множество значений выражения  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  — это луч  $[\frac{4}{k}; +\infty)$  (проверьте это, записав сумму в виде  $\frac{1}{a} + \frac{1}{k-a} = \frac{k}{a(k-a)}$ ).

Тогда для данных  $x$  и  $y$  выберем положительные суммы  $a + b$  и  $c + d$  так, что  $a + b - c - d = x$  (сами числа  $a, b, c, d$  пока не фиксируем).

Поскольку выражения  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  и  $\frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ , по сказанному выше, принимают сколь угодно большие значения, можно подобрать положительные  $a, b, c, d$  так, чтобы разность этих выражений равнялась  $y$ .

**Решение 3.** Докажем, что подходит  $n = 4$ . Будем искать числа  $a_1, \dots, a_4$  как корни многочлена вида  $P(t) = t^4 - xt^3 - ut^2 - yt + 1$  (согласно формулам Виета они удовлетворяют указанным равенствам). Поскольку  $P(0) = 1$ , для того чтобы многочлен  $P(t)$  имел четыре вещественных корня, достаточно, чтобы числа  $P(1) = 2 - x - u - y$  и  $P(-1) = 2 + x - u + y$  были отрицательны. Мы этого добьемся, взяв  $u > |x + y| + 2$ .

**Замечание.** Можно доказать, что  $n = 1, n = 2$  и  $n = 3$  не подходят.

**3.** [5] Точка  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega$  проходит через точку  $A$ , касается прямой  $BC$  в точке  $M$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$ , а сторону  $AC$  — в точке  $E$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — середины отрезков  $BE$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $MXY$  касается  $\omega$ .

*Алексей Доледенюк*

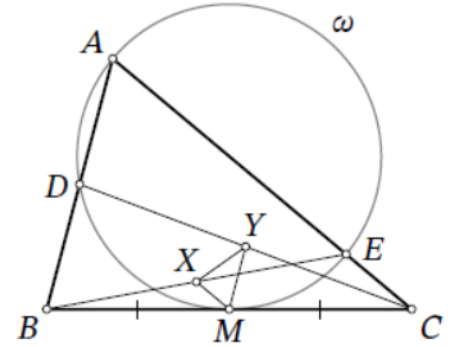
**Решение.** Заметим, что  $MX$  и  $MY$  — средние линии треугольников  $CBE$  и  $BCD$  соответственно. По условию

$$BD \cdot BA = BM^2 = CM^2 = CE \cdot CA,$$

откуда

$$MX : MY = CE : BD = BA : CA.$$

Поскольку  $MX \parallel AC$  и  $MY \parallel AB$ , треугольники  $MXY$  и  $ABC$  подобны. Значит,  $\angle MXY = \angle B = \angle YMC$ . По теореме об угле между касательной и хордой сторона  $BC$  касается описанной окружности треугольника  $MXY$ , что и требовалось.



**4.** [8] В ряд лежат  $100N$  бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном  $N$  он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

*Иван Митрофанов*

**Решение.** Докажем, что при  $N = 3^{100}$  выигрывает кот Матроскин. Для этого достаточно, чтобы на последнем шаге дяди Фёдора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы.

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых даёт остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого даёт остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые  $3^{99}$  ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как Дядя Фёдор за это время съедает  $3^{99} \cdot 100$  бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие  $3^{99}$  ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется — ничего не делать. Так как за один ход дядя Фёдор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то ещё через  $3^{99}$  ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьётся того, чтобы все бутерброды, номер которых даёт остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество

бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

**Замечание 1.** Каждым ходом дядя Фёдор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

**Замечание 2.** Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при  $N = 2^{100}$  он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в 2 раза. Для этого ему нужно стягивать колбасу только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Фёдор на данной стадии гарантированно не доберётся. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда найдётся.

А вот при  $N = 2^{100} - 1$  уже выигрывает дядя Фёдор. Действительно, первыми  $2^{99} - 1$  ходами он съест любые  $2^{99} - 1$  сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более  $2^{99} - 1$  бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Фёдором лежит  $2^k$  сотен бутербродов, из которых не более  $(100 - k) \cdot 2^k - 1$  без колбасы, то при  $k > 0$  он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более  $(100 - k) \cdot 2^{k-1} - 1$  плюс, благодаря коту Матроскину, не более  $2^{k-1}$  новых — всего не более  $(100 - k + 1) \cdot 2^{k-1} - 1$ . Продолжая так и далее, при  $k = 0$  дядя Фёдор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

5. [8] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, ...,  $n$ , из которых  $k$  на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого  $k$  укажите наименьшее  $n$ , при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

*Фёдор Ивлёв*

**Ответ:**  $n = 100(m + 1)$  при  $k = 2m$  и  $n = 100(m + 1) + 1$  при  $k = 2m + 1$ .

**Решение.** Пусть  $k = 2m$  или  $k = 2m + 1$ .

*Алгоритм.* Мысленно разделим номера на 100 участков по  $m + 1$  номеров, а в случае нечётного  $k$  оставшийся номер объявим запасным. Пусть  $i$ -й турист сначала проверяет все номера  $i$ -го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера  $(i + 1)$ -го участка, но справа налево (если  $i = 100$ , проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего  $k + 2$  номера.

*Оценка.* Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из  $k + 1$  различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

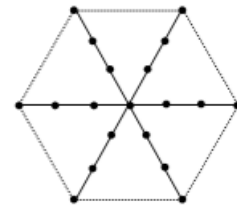
Рассмотрим для каждого туриста первые  $m + 1$  номеров из его списка. Все эти  $100(m + 1)$  чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше  $m + m = 2m$ , все на ремонте). Следовательно,  $n \geq 100(m + 1)$ .

При чётном  $k$  этой оценки достаточно. В случае нечётного  $k$ , если у какого-то туриста, скажем, Пети,  $(m + 2)$ -й номер совпадает с каким-то из  $100(m + 1)$  «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые  $m + 1$  номеров, а у Васи — первые  $m$  будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все  $(m + 2)$ -е номера отличны от  $100(m + 1)$  первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть  $n \geq 100(m + 1) + 1$ .

**Замечание.** Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном  $k$  мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери  $k + 2$  номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более  $k$  ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном  $k$  представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по  $k + 2$  номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и  $k = 5$ ). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил  $\frac{k+1}{2}$  ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



**6. [10]** Найдите хоть одно вещественное число  $A$  со свойством: для любого натурального  $n$  расстояние от верхней целой части числа  $A^n$  до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа  $x$  — наименьшее целое число, не меньшее  $x$ .)

*Дмитрий Кречков*

**Решение.** Рассмотрим любое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, у которого два положительных корня, произведение которых равно 1. Подойдёт, например, уравнение  $x^2 - 4x + 1$ , его корни — это  $2 + \sqrt{3}$  и  $2 - \sqrt{3}$ . Заметим, что сумма и произведение этих корней — целые, а тогда и сумма  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$  — целая при любом натуральном  $n$  (это нетрудно доказать по индукции или просто раскрыв скобки: слагаемые с  $\sqrt{3}$  либо входят в чётной степени, либо взаимно уничтожаются).

Тогда  $((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)^2$  — точный квадрат, и он равен  $(2 + \sqrt{3})^{2n} + 2 + (2 - \sqrt{3})^{2n}$  (так как произведение корней равно 1), то есть отстоит на 2 от числа  $(2 + \sqrt{3})^{2n} + (2 - \sqrt{3})^{2n}$ , которое, в свою очередь, есть верхняя целая часть числа  $(2 + \sqrt{3})^{2n}$  (поскольку второй корень положителен и меньше 1).

Но тогда число  $A = (2 + \sqrt{3})^2$  — искомое.

**7.** Дано целое  $n > 2$ . На сфере радиуса 1 требуется расположить  $n$  попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины  $\alpha$ . Докажите, что а) [6] при любом  $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$  это возможно; б) [7] при любом  $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$  это невозможно.

*Илья Богданов*

**Решение.** а) Пусть вертикальная прямая  $\ell$  проходит через центр сферы  $O$ . Пусть две параллельных горизонтальных плоскости высекают на сфере две равных (не больших!) окружности  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Тогда существует большая окружность  $\Omega_0$ , касающаяся  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  в (диаметрально противоположных) точках  $P_0$  и  $M_0$  соответственно. Повернув  $\Omega_0$  на угол  $\frac{2\pi k}{n}$  вокруг  $\ell$ , получим большую окружность  $\Omega_k$ , также касающуюся двух окружностей в точках  $P_k$  и  $M_k$  соответственно.

Рассмотрим одну дугу  $P_0M_0$  окружности  $\Omega_0$ , а также дуги  $P_kM_k$ , полученные из неё поворотами. Все эти дуги не пересекаются, поскольку любая горизонтальная плоскость пересекает эти дуги в вершинах правильного  $n$ -угольника. Более того, каждую из этих дуг  $P_kM_k$  можно расширить до ближайших к ней (но не лежащих на ней) точек пересечения  $\Omega_k$  с другими окружностями  $\Omega_i$ . Заметим, что точки пересечения  $\Omega_k$  и  $\Omega_i$  лежат в (вертикальной) плоскости, симметрия относительно которой меняет эти окружности местами (эта плоскость содержит, например, биссектрису угла  $P_iOP_k$ ). Отсюда легко видеть, что ближайшими к нашей дуге будут точки пересечения с  $\Omega_{k-1}$  и с  $\Omega_{k+1}$ , и каждую дугу  $P_kM_k$  можно расширить до дуги между этими точками (не включая концов).

Если теперь плоскости, высекающие  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , взять близкими к центру сферы, то точки пересечения  $\Omega_k$  и  $\Omega_{k-1}$  будут (из симметрии) близки к серединам дуг  $P_kP_{k-1}$  и  $M_kM_{k-1}$ . Поэтому длины полученных дуг можно сделать сколь угодно близкими к  $\pi + \frac{2\pi}{n}$ , что и требовалось.

б) Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — попарно не пересекающиеся дуги больших окружностей с длинами  $\pi + \alpha_1, \pi + \alpha_2, \dots, \pi + \alpha_n$  при положительных  $\alpha_i$ ; мы считаем, что они содержат свои концы. Мы докажем, что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi,$$

откуда и следует требуемое.



В дальнейшем под *полосом* полусферы мы понимаем точку этой полусферы, наиболее удалённую от её границы.

Обозначим через  $B_i$  дугу большой окружности, дополнительную к  $A_i$  (её длина равна  $\pi - \alpha_i$ ). Рассмотрим все (открытые) полусферы, содержащие  $B_i$ ; пусть  $X_i$  и  $Y_i$  — концы  $B_i$  (мы считаем, что они принадлежат  $B_i$ ). Полусфера содержит  $B_i$  тогда и только тогда, когда она содержит  $X_i$  и  $Y_i$ , то есть когда её полюс лежит в открытых полусферах с полюсами  $X_i$  и  $Y_i$ . Значит, множество  $\mathcal{S}_i$  полюсов таких полусфер — это пересечение этих двух полусфер, то есть сферический «ломтик» раствора  $\alpha_i$ ; его площадь равна  $2\alpha_i$ .

Докажем теперь, что множества  $\mathcal{S}_i$  попарно не пересекаются; поскольку площадь сферы равна  $4\pi$ , отсюда вытекает требуемое неравенство. Предположим, что некоторая точка  $Z$  лежит в  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ ; тогда полусфера с полюсом  $Z$  содержит  $B_1$  и  $B_2$ , а значит, дополнительная к ней (замкнутая) полусфера  $\mathcal{H}$  пересекает  $A_1$  и  $A_2$  по целым полуокружностям (а не их частям). Но любые две таких полуокружности на полусфере  $\mathcal{H}$  пересекаются (ибо концы любой — диаметрально противоположные точки на границе полусферы). Это противоречит нашему предположению.

**Замечание.** Для любых положительных чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , сумма которых меньше  $2\pi$ , на сфере можно расположить попарно не пересекающиеся дуги длин  $\pi + \alpha_i$  тем же методом, что и в решении пункта а).