Условия задач первого – заочного тура XXXII олимпиады
по математике, информатике и криптографии

(см. также на сайте ***www.uni.bsu.by*** *на странице олимпиады)*

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2023»)

1. Коля и Витя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшееся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшегося другому. Квадрат числа орехов, доставшихся Коле, меньше числа орехов, доставшихся Вите, умноженного на 9. Сколько орехов досталось каждому?
2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg}\sqrt{x+16} = \operatorname{tg}\sqrt{x}$.
4. Точка M удалена от сторон правильного треугольника (или от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3 и 6. Найдите сторону правильного треугольника, если известно, что его площадь меньше 14.
5. Решите неравенство $\log_{x+2}\left(x(x+1)(x+3)(x+4)\right) > 2$.
6. Кодовый замок имеет следующую конструкцию. Он состоит из m дисков, нанизанных на ось, что позволяет им вращаться. На каждый диск нанесены числа от 1 до n, расположенные в порядке возрастания. Срезом будем называть набор из m чисел на этих дисках, которые расположены на одной линии, параллельной оси. Всего имеется n срезов.

   Пусть имеется некоторое расположение чисел на одном из срезов, полученное вращением дисков. Зафиксируем это расположение. Найдем сумму чисел по каждому срезу (при этом фиксированном расположении выбранного среза), и среди всех этих сумм выберем максимальное. Обозначим эту величину через S и назовем ее характеристикой замка при данном расположении чисел на выбранном срезе. Кодовый замок открывается, если величина S принимает минимальное значение среди всех возможных характеристик.

   Первым срезом назовем срез, проходящий через единицу первого диска. Требуется для заданных n и m найти расположение чисел на первом срезе, при которых S минимально и описать алгоритм, который позволяет открыть замок.
7. Пусть задана последовательность символов X (текст). Преобразование E изменяет заданный текст следующим образом: сначала выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, кратных 3, затем выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, дающие остаток 1 при делении на 3, и, наконец, выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, дающие остаток 2 при делении на 3. Номера позиций начинаются с 1. Например, если X = "АБВГДЕЖЗИ", то E(X) = " ВЕИАГЖБДЗ ". К некоторому тексту X преобразование E применили последовательно 2023 раза и получили новый текст (см. ниже). Найдите исходное сообщение (пробелы вставлены для удобства чтения и никак не связаны с реальным разделением на слова в исходном сообщении).

ОУОМА ОМСЖМ РЧПДЛ ВНДТЕ НИЫИА АЁ

<u>**Задачи для учащихся 9–10 классов**   (творческая олимпиада)</u>

1. Коля и Витя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшееся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшегося другому. Квадрат числа орехов, доставшихся Коле, меньше числа орехов, доставшихся Вите, умноженного на 9. Сколько орехов досталось каждому?

2. А) Найдите множество всех натуральных значений *n*, при которых значение дроби $\dfrac{3n^2-26n+35}{4n-28}$ является натуральным числом. Б) Найдите сумму 12 наименьших элементов (чисел) этого множества. В) Сколько среди них являются точными квадратами (т.е. являются квадратами натуральных чисел)?

3. На координатной плоскости изображен равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Одна из его боковых сторон лежит на прямой $2x$-y+2=0. Точка A имеет координаты (0, 2), точка B – (3,3). Найдите координаты вершины С, площадь треугольника и радиус окружности, описанной около ABC.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9;\\ x+2y-2z-4=0.\end{cases}$$

5. Три конькобежца, скорости которых в некотором прядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют из одной точки кругового стадиона. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 метров больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время на 40 секунд большее, чем время, которое затратил на это расстояние первый. Найдите скорость первого конькобежца.

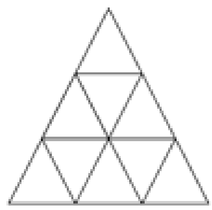
6. Точка M удалена от сторон правильного треугольника (или от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3 и 6. Найдите сторону правильного треугольника, если известно, что его площадь меньше 14.

7. Пусть задана последовательность символов *X* (текст). Преобразование Е изменяет заданный текст следующим образом: сначала выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, кратных 3, затем выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, дающие остаток 1 при делении на 3, и, наконец, выписываются все символы слева направо, стоящие на позициях, дающие остаток 2 при делении на 3. Номера позиций начинаются с 1. Например, если Х = "АБВГДЕЖЗИ", то Е(Х) = " ВЕИАГЖБДЗ ". К некоторому тексту Х преобразование Е применили последовательно 2023 раза и получили новый текст (см. ниже). Найдите исходное сообщение (пробелы вставлены для удобства чтения и никак не связаны с реальным разделением на слова в исходном сообщении).

ОУОМА ОМСЖМ РЧПДЛ ВНДТЕ НИЫИА АЁ

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада)

1. По кругу за столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут – всего 2023 человек. Каждый из них знает всех, за исключением трех своих ближайших соседей слева и трех своих ближайших соседей справа. На вопрос о людях, которых они знают, каждый ответил: «Всех, кого я знаю, лжецы». Сколько лжецов может сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и обоснуйте их.
2. На доске записано одно число: 2023!. У него вычислили сумму цифр и к результату прибавили 9. Получившееся число записали на доску взамен исходного. Затем у нового числа снова вычислили сумму цифр и к результату прибавили 9. Новое число записали на доску взамен предыдущего. Такие операции производили до тех пор, пока число на доске не перестало меняться. Найдите все возможные значения, которые оно может принимать. (n! – это число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до n.)
3. Саша и Петя играют в игру. На концах клетчатой полоски $1\times n$ стоит по фишке. За ход разрешается сдвинуть любую фишку в направлении другой на одну, две или три клетки. Перепрыгивать фишкой через фишку не разрешается. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первый ход делает Саша. Кто выиграет независимо от игры соперника и как ему для этого нужно играть, если а) n=2022; б) n=2023?
4. Какое наименьшее количество цветов необходимо, чтобы покрасить все стороны и диагонали выпуклого n-угольника, если любые два отрезка, выходящие из одной вершины должны быть разного цвета? Ответ обоснуйте.
5. Точка M лежит внутри правильного треугольника и удалена от его сторон на расстояния 2, 3 и 5. Найдите все значения, которые может принимать сторона данного треугольника.
6. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной, равной n. После этого рисунок разбит на единичные треугольники, как показано на рисунке для $n=3$. Сколько различных треугольников вы сможете найти на этом рисунке? Треугольники считаются различными, если они различаются либо по размерам, либо по расположению. Решите эту задачу для $n=3,4,5$.



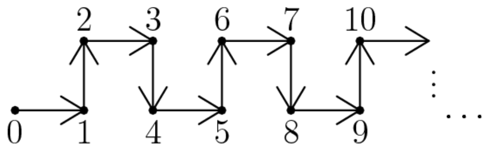
7. Расшифруйте ребус так, чтобы были справедливы все указанные равенства (*как обычно разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые*):

$$\begin{array}{ccccc} \text{ОУ} & \times & \text{Р} & = & \text{ОЫО} \\ + & & \times & & - \\ \text{ТТ} & + & \text{Т} & = & \text{УН} \\ = & & = & & = \\ \text{АЗЫ} & + & \text{ЙЧ} & = & \text{АЙУ} \end{array}$$

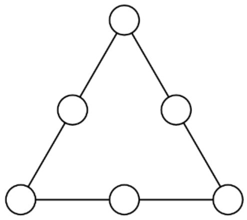
Затем расставьте буквы в порядке возрастания их цифровых значений и получите ответ.

<u>Задачи для учащихся 5-6 классов</u> <u>(начальная олимпиада)</u>

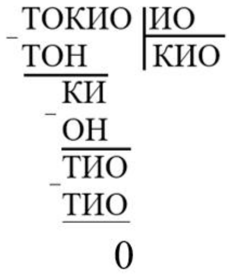
1. На рисунке изображен путь частицы от своей начальной – 0-й точки, до 10-й, причем как движется частица от точки к точке показано стрелками. Если этот путь будет продолжаться по тому же правилу, то какая последовательность стрелок идет от точки 425 к точке 427?



2. Для того чтобы получить магический треугольник, нужно в кружочки вписать целые числа из следующего набора: 1, 2, 3, 6, 8, 10, 2021, 2022, 2023 (каждое число можно использовать только один раз, и в каждый кружочек можно вписать ровно одно число, см. рисунок справа). При этом нужно, чтобы были выполнены следующие условия: суммы трех чисел, расположенных на всех трех сторонах треугольника должны быть одинаковыми и принимать наибольшее возможное значение среди подобных сумм при других расстановках чисел. Сможете ли вы выполнить такое задание?!



3. Восстановите числовой пример (см. рисунок, *как обычно одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, а разные – разными*):



4. А) По кругу за столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут – всего 2023 человек. Каждый из них знает всех, за исключением своих ближайших соседей слева и справа. Все люди по очереди сказали: «Всех, кого я знаю, лжецы». Сколько рыцарей может сидеть за столом?

   Б) Тот же вопрос для случая, когда каждый из них знает всех, за исключением трех своих ближайших соседей слева и трех своих ближайших соседей справа. На вопрос о людях, которых они знают, каждый ответил: «Всех, кого я знаю, лжецы». Сколько рыцарей теперь может сидеть за столом?

   В обоих пунктах укажите все возможные варианты и обоснуйте их.

5. Какое наименьшее количество цветов необходимо, чтобы покрасить все стороны и диагонали выпуклого 6-угольника, если любые два отрезка, выходящие из одной вершины должны быть разного цвета? Опишите (или нарисуйте), как вы покрасите отрезки, и покажите, что меньшим числом цветов обойтись нельзя.

6. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной, равной n. После этого рисунок разбит на единичные треугольники, как показано на рисунке для $n=3$. Сколько различных треугольников вы сможете найти на этом рисунке? Треугольники считаются различными, если они различаются либо по размерам, либо по расположению. Решите эту задачу для $n=3$ и $n=4$.