

Заключительный тур

23 мая 2020

11 классы

- *Время выполнения задания 4 часа: 11.00 – 15.00.*
- *Решение каждой задачи оформлять на отдельных листах, подписать, сканировать или сфотографировать и переслать на электронный адрес Ps.Nz.ofpmi@gmail.com, где **P** означает класс, в котором Вы учитесь, **N** – номер задачи в задании. В теме письма указать ФИО и школу.*
- *Жюри настоятельно рекомендует **оформлять задачи подробно и разборчиво**, а размер чертежей и рисунков делать достаточным для понимания. Помните, что непонятные или спорные(!) моменты (т.е. такие, в которых нет однозначного логичного обоснования) могут быть истолкованы не в пользу учащегося.*
- **ВНИМАТЕЛЬНО** *вчитывайтесь в условия задач – в случае сомнений и даже кажущихся двусмысленности или недостаточности условий сами находите разумное понимание или подход к задаче. Помните, что порядок проведения олимпиады таков, что жюри не может ответить на Ваши вопросы или сделать какие-то уточнения – и в этом все участники олимпиады находятся в равных условиях!*

Условия задач

1. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Найти все корни уравнения $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}x^6 - [x]$.
2. Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе
$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases} \text{ . Решить}$$
 неравенство $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$.
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD , причем $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$. Найти BC , если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.
4. На плоскости заданы квадрат и треугольник. Вершины квадрата имеют координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, а вершины треугольника имеют координаты $(x_5, y_5), (x_6, y_6), (x_7, y_7)$. Написать уравнение прямой вида $Ax + By + C = 0$, которая делит квадрат и треугольник на равновеликие части.

5. Зашифрование с помощью аффинного шифра происходит следующим образом: 1) каждая буква сообщения заменяется на номер этой буквы в алфавите (нумерация начинается с нуля, см. таблицу внизу); 2) каждый номер буквы x заменяется на новый номер $y = (ax + b) \bmod 32$, где пара натуральных чисел (a, b) – это ключ шифрования, запись "mod 32" означает нахождение остатка от деления на 32; 3) новые номера заменяются на соответствующие буквы алфавита, а получившаяся последовательность букв является результатом зашифрования. Перед зашифрованием из сообщения удаляют все знаки препинания и пробелы.

Незнайка зашифровал некоторое осмысленное выражение и передал его Знайке:

ФАМФА ИМДАФ ШДАРИ РШМРЬ ДЬБИШ РАМРИ РРИИД РАФИИ ШИИ

С помощью математических вычислений Знайка не смог расшифровать сообщение, несмотря на то, что он знал ключ $(a, b) = (4, 8)$. Объясните, как такое могло произойти, и восстановите сообщение Незнайки.

Примечания: пробелы в зашифрованном сообщении вставлены для удобства прочтения; необходимо подробно описать, как вы восстанавливаете сообщение, правильный ответ без описания оцениваться не будет.

А	Б	В	Г	Д	Е/Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Шифр простой замены представляет собой алгоритм побуквенного зашифрования текста с использованием таблицы замены. Каждая буква открытого (исходного) текста заменяется соответствующей буквой из таблицы. При этом одинаковые буквы заменяются одинаковыми, разные – разными.

В дальнейшем будем работать с русским алфавитом A , состоящим из 33 букв. Пусть задан некоторый неизвестный шифр простой замены $E: A \rightarrow A$ и есть два устройства S_k и S_m ($k \neq m$). Устройство S_k позволяет выбрать пользователю любую последовательность символов из алфавита и зашифровать его k раз подряд, т.е. $S_k(X) = E(E(\dots E(X)\dots))$, где функция E применяется k раз. При этом выводится только результат последнего зашифрования. Аналогично работает устройство S_m , только оно зашифровывает m раз подряд. Устройства можно использовать любое количество раз.

1) Докажите, что если $k = 2$, $m = 3$, то с помощью устройств S_k и S_m всегда можно однозначно восстановить таблицу замены шифра E .

2) Докажите, что если числа m и k взаимно простые, то с помощью устройств S_k и S_m всегда можно однозначно восстановить таблицу замены шифра E .

3*) Найдите все пары не взаимно простых чисел m и k , что таблицу замены шифра E можно однозначно восстановить с помощью устройств S_k и S_m .