

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

*приглашает к участию
в олимпиадах по математике и информатике*

XXIX ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

***Условия задач первого тура олимпиады
по математике и информатике***

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2020»)

1. Сто один человек купили 212 воздушных шаров четырех цветов, причем ни у кого не было двух шаров одного цвета. Число купивших четыре шара на 13 больше числа купивших два шара. Сколько человек купили один шар?
2. Величины x и y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$. Определить, какие значения может принимать выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
3. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Найти $\angle CDB$, если $AD = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, $BE = 4$, $DB : CE = 3 : 2$.
4. Доказать справедливость равенства $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.
5. Найти наибольшее значение выражения $x + y$, если $x^2 + y^2 \leq 4x$.
6. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной, равной n . После этого рисунок разбит на единичные треугольники, как показано на рисунке для $n = 3$. Сколько различных треугольников вы сможете найти на этом рисунке? Треугольники считаются различными, если они различаются либо по размерам, либо по расположению. Решите эту задачу для $n = 3, 4, 5$. Выведите формулу для определения числа треугольников в зависимости от величины n .




Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Обозначим через $P(x)$ произведение цифр числа x . В ряд выписали числа $P(2020)$, $P(2021)$, $P(2022)$,.... Какое наибольшее число подряд идущих членов получившейся последовательности могут оказаться последовательными натуральными числами?
2. Какое наименьшее количество цветов необходимо, чтобы покрасить все вершины, стороны и диагонали выпуклого n -угольника, если должны выполняться два условия:
 - 1) любые два отрезка, выходящие из одной вершины должны быть разного цвета;
 - 2) цвет любой вершины должен отличаться от цвета любого отрезка, выходящего из нее?
3. Решите уравнение: $[x] + [x^2] = [x^3]$. Здесь $[x]$ – наибольшее целое число не превосходящее x .

4. Решите в целых числах уравнение $(x^2 - y^2)^2 = 16y + 1$.
5. Три высоты остроугольного треугольника пересекаются в точке H , которая делит одну из высот пополам, а другую в отношении $2 : 1$, считая от вершины. В каком отношении точка H делит третью высоту?
6. Вася и Петя заполняли клетчатый прямоугольник, в котором m строк и n столбцов ($m > 1, n > 1$) последовательными натуральными числами от 1 до mn . Сначала это сделал Вася, двигаясь сверху вниз по строкам и заполняя каждую строчку слева направо. Потом это сделал Петя, который двигался слева направо по столбцам, заполняя каждый столбец сверху вниз. Сколько оказалось клеток, в которых записаны два одинаковых числа?

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада)

1. По кругу сидят рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут – всего 2020 человек. Каждый из них знает всех, за исключением своих ближайших соседей. Все люди по очереди сказали: «Всех, кого я знаю, лжецы». Сколько рыцарей может сидеть за столом?
2. Две тысячи двадцать парламентариев сидят в прямоугольном зале в 40 рядах по 55 кресла в каждом. Парламентарий считает себя *низкооплачиваемым*, если получает зарплату, меньшую, чем все его соседи (спереди, сзади, справа, слева и по диагоналям) Какое наибольшее число низкооплачиваемых парламентариев может быть в этом зале?
3. Обозначим через $P(n)$ произведение цифр натурального числа n . В ряд выписали числа $P(2020), P(2021), P(2022), \dots$. Какое наибольшее число подряд идущих членов получившейся последовательности могут оказаться последовательными натуральными числами?
4. Незнайка утверждает, что в компании, состоящей из а) 2019; б) 2020 человек, по крайней мере двое имеют одинаковое число знакомых среди членов этой компании. Прав ли Незнайка?
5. Среди 16 внешне одинаковых монет есть ровно одна фальшивая, которая весит меньше настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить фальшивую монету? (Весы не имеют делений, а только показывают равенство чаш или какая чаша перевесила.)
6. На листе бумаги нарисован правильный треугольник со стороной, равной n . После этого рисунок разбит на единичные треугольники, как показано на рисунке для $n=3$. Сколько различных треугольников вы сможете найти на этом рисунке? Треугольники считаются различными, если они различаются либо по размерам, либо по расположению.



 - а) Решите эту задачу для $n=3, 4, 5$.
 - б) Выведите формулу для определения числа треугольников в зависимости от величины n .