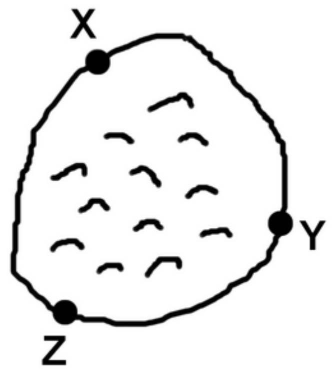
XXIX Олимпиада ФПМИ по математике, информатике и криптографии

Решения заключительного тура

<u>7-8 классы</u>

1. Вокруг лужи расположены три муравейника – X, Y и Z. Из муравейника X вышли две группы муравьев – первая направилась в сторону Y, вторая – в сторону Z. Дойдя до этих муравейников, насекомые разделились: в каждой группе несколько муравьев повернули обратно в X по той же дороге, по которой пришли. Все остальные продолжили поход и, в конце концов, вернулись в X с другой стороны, обойдя лужу. Известно, что в первой группе было 100 муравьев, а в Z побывало на 10 насекомых больше, чем в Y. Сколько муравьев преодолело путь из Z в X во время похода?



Ответ: 110.
Решение. Пусть из X в направлении Z вышли $n+m$ муравьев, из которых m повернули назад. Пусть из X в направлении Y вышли $k+l$ муравьев, из которых k повернули назад. Таким образом, в муравейнике Z побывало $(n+m+l)$, а в Y – $(k+l+n)$ насекомых. Требуется найти количество муравьев, преодолевших путь из Z в X, т.е. $m+l$.
По условию $k+l=100$, а $(n+m+l) – (k+l+n)=10$ или $m–k=10$. Сложим последнее соотношение с первым и получим, что $m+l=110$.

2. Три добрых молодца попали в заточение к дракону. У первого из них оказалось 5 золотых монет, у второго – 17 монет, у третьего – 43 монеты. Добрым молодцам разрешено передавать друг другу монеты по следующему правилу: любой из них может удвоить количество своих монет, взяв, если это возможно, необходимое число монет у кого-то из двух других молодцев. Данную операцию дракон разрешает выполнять сколько угодно раз. Дракон отпустит всех троих, если пленники указанными операциями смогут добиться, чтобы у кого-то из них совсем не оказалось монет. Смогут ли освободиться добрые молодцы? Ответ обосновать.

Ответ: смогут.
Решение: Первые несколько ходов молодцы делают следующим образом:

$$(5, 17, 43) \to (10, 12, 43) \to (20, 2, 43) = (16+4, 2, 2+8+33)$$

и далее понятно: среднее число 2 все время удваиваем, используя по очереди числа, стоящие справа и слева, тогда будем получать степени двойки 2, 4, 8, 16, 32 и на этом ходу слева окажется 0:

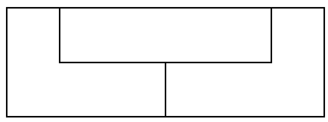
$$(16+4, 2, 2+8+33) \to (16+4, 4, 8+33) \to (16, 8, 8+33) \to (16, 16, 33) \to$$

$$\to (0, 32, 33),$$

после чего дракон отпустит добрых молодцев на свободу.

3. Найдите все пары натуральных m и n такие, что прямоугольник $m\times n$ можно замостить при помощи фигурок двух типов: полосок 1×4 и перевернутых букв «Г» (см. рисунок; фигурки можно поворачивать и переворачивать; весь прямоугольник должен быть покрыт, и ни одна клетка не должна быть покрыта дважды).

Ответ: все пары (m, n) такие, что произведение mn кратно 4, кроме $m = n = 2$.
Решение. Очевидно, что произведение чисел m и n должно делиться на 4. Если длина одной из сторон прямоугольника делится на 4, то, очевидно, прямоугольник можно замостить одними полосками 1×4. Осталось рассмотреть случай, когда длины обеих сторон прямоугольника делятся на 2, но не делятся на 4.
Очевидно, что квадрат 2×2 замостить невозможно. Прямоугольник 2×6 замостить можно:



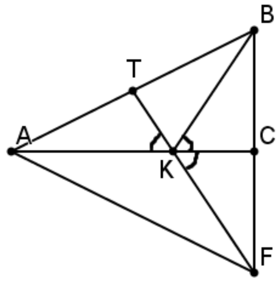
Заметим, что если прямоугольник $m\times n$ замостить можно, то можно замостить и прямоугольник $m\times(n+4)$ (поскольку прямоугольник $m\times 4$ можно замостить полосками 1×4). Нетрудно видеть, что с помощью такой операции можно перейти от замощения прямоугольника 2×6 к замощению любого прямоугольника $m \times n$, длины сторон которого являются четными числами, не кратными 4, если хотя бы одна из сторон больше 2.

4. Найдите все целые x и y, удовлетворяющие равенству $4x^2 - 21y^2 = 600$.
Ответ: нет решений в целых числах.
Решение. Очевидно, число y делится на 2. Пусть $y = 2y_1$. Кроме того, ясно, что x делится на 3, и мы можем сказать, что $x = 3x_1$. Подставим в исходное уравнение:
$$36x_1^2 - 84y_1^2 = 600,$$
$$3x_1^2 - 7y_1^2 = 50,$$
Таким образом, число $3x_1^2$ дает остаток 1 при делении на 7. Но квадрат натурального числа может давать остатки 0, 1, 2, 4 при делении на 7, а утроенные квадраты – остатки 0, 3, 5, 6 при делении на 7. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC отмечена точка K, а на гипотенузе – середина T. Оказалось, что угол CKB равен углу AKT. Найдите AK, если KC=6.

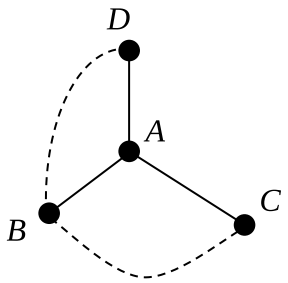
Ответ: 12.

Решение. Продлим TK до пересечения с прямой BC в точке F. Тогда прямоугольные треугольники BCK и FCK равны по общему катету и острому углу, откуда $BC=CF$. Таким образом, в треугольнике ABF отрезки AC и FT являются медианами, а K – точка их пересечения, которая делит каждую медиану (в частности, AC) в соотношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $AK=2KC=12$.



6. Каждый город некоторой страны связан двухсторонним авиасообщением не менее чем с тремя другими городами. Всегда ли можно выбрать четное, большее двух, количество городов так, чтобы они образовывали круговой маршрут (т.е. можно начать с любого города и вернуться в него, побывав в каждом из остальных выбранных городов, ровно по одному разу)?

Решение. Города, которые связаны авиасообщением, назовем *соседними*. Будем облетать города, используя линии авиасообщения, не посещая одного и того же города дважды. Когда-нибудь этот процесс закончится. Последние два города в нашем маршруте обозначим D и A. Так как далее маршрут продолжить мы уже не можем, то все три соседа города A уже посещены (один из этих соседей, очевидно, D, а два других обозначим – B и C). Образуется следующая схема:



Города B и C могут располагаться в обратной последовательности, но мы, не теряя общности, расположим их так, как показано на рисунке. При этом на рисунке сплошная линия обозначает авиасообщение, а пунктирная – маршрут, проходящий, возможно, через несколько городов. Эти маршруты мы будем называть *дугами*.

Предположим, что каждый замкнутый маршрут на рисунке проходит через нечетное число городов. Тогда:

1) Рассмотрим замкнутый маршрут, состоящий из дуги CB, дуги BD, авиасообщения DA и авиасообщения AC. Этот маршрут содержит нечетное число авиасообщений; следовательно, всего на схеме четное число авиасообщений, так как незадействованным в указанном маршруте оказался только маршрут AB.

2) Рассмотрим два замкнутых маршрута, устроенных следующим образом: первый маршрут – перелет AB, дуга BD и дуга DA, второй маршрут – перелет AB, дуга BC и дуга CA. Каждый из этих маршрутов имеет нечетную длину. Следовательно, дуги BD и BC состоят из нечетного числа авиаперелетов. Но тогда число всех авиасообщений на схеме является нечетным числом (т.к. всего имеется по нечетному числу авиасообщений в дугах CB и BD и еще три авиасообщения, ведущих из города A).

Значит, с одной стороны, число авиасообщений на схеме должно быть четным числом, а с другой стороны – нечетным. Полученное противоречие завершает решение задачи.