XXIX олимпиада ФПМИ по направлению «Математика и информатика»

РЕШЕНИЯ задач очного тура, 5-6 класс

1. Найдите наибольшее

   а) нечётное пятизначное число,

   б) чётное пятизначное число;

   первые три цифры которого образуют точный квадрат, а последние три цифры – точный куб. (Например, в числе 40001 первые три цифры образуют число $400 = 20^2$, а последние три цифры – число $001 = 1^3$.)

.

Ответ: а) 96125; б) 90064.

Решение. По условия первая цифра трёхзначного точного куба служит последней цифрой точного квадрата. Квадрат числа может заканчиваться на одну из цифр: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Найдём наибольшие трёхзначные числа, являющиеся точными квадратами: $31^2 = 961$; $30^2 = 900$; $29^2 = 841$ и т.д. Отсюда следует, что искомые наибольшие числа нужно искать исходя из этих чисел – именно в них находятся самые большие цифры (9 или 8) в старшем разряде.

Заметим, что из трехзначных чисел, являющихся точными кубами, на единицу начинается только $125 = 5^3$, отсюда получаем самое большое нечетное число 96125, а на чётную цифру (что необходимо для поиска числа в пункте б)) заканчиваются только $8^3 = 512$; $4^3 = 064$ и $2^3 = 008$. Отсюда ответ в пункте б) 90064.

2. Расшифровать равенство $\overline{**}\times * = \overline{**9}$, если известно, что в разложении числа $\overline{**9}$ на простые множители наименьший множитель больше 3, а наибольший меньше 17.

.

Ответ: 77·7 = 539.

Решение. По условию при умножении последней цифры множимого на множитель получено число, оканчивающееся цифрой 9. Это возможно лишь при четырёх умножениях: 1)*9·1; 2) *1·9; 3) *3·3; 4) *7·7.

Первая комбинация отпадает, так как в этом случае произведение будет двузначным числом.

Вторая и третья комбинации отпадают, так как в обоих случаях разложение произведения на простые множители будет содержать множитель 3, что противоречит условию.

Значит, сомножители могут быть *7 и 7, и множимое имеет один из следующих видов: 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97. Заметим, что значения 27, 57 и 87 не подходят, так как эти числа делятся на 3 и, следовательно, разложение их произведения будет содержать множитель 3. Числа 17, 37, 47, 67 и 97 не подходят так как все эти числа простые и, следовательно, разложение их произведения будет содержать этот простой множитель не меньший 17, что противоречит условию.

Единственно возможное значение 77. Тогда 77·7=539=7·7·11 удовлетворяет условию задачи.

3. а) Найдите все двузначные и трехзначные числа, равные сумме своих цифр, умноженной на 6.
   б) Найдите все целые положительные числа, равные сумме своих цифр, умноженной на 6.

Ответ: а) 54, б) таких чисел больше нет.

Решение. а) Рассмотрим сначала двузначные числа и запишем условие, воспользовавшись следующей стандартной записью чисел:

$$\overline{ab} = 10a + b = 6 \cdot (a + b),$$

где a и b цифры числа, причем $a \neq 0$. Отсюда $4a = 5b$ и единственный подходящий вариант $a = 5$, $b = 4$, т.е. искомое число 54.

Для трехзначных чисел, для которых условие задачи выглядит так: $\overline{abc} = 6 \cdot (a + b + c)$, важно заметить такие свойства:

(1) сумма цифр искомых чисел не превосходит 27, значит, сами числа не превосходят $6{\cdot}(a + b + c) \leq 6{\cdot}27 = 162$,

(2) искомые числа должны делиться на 9 и на 2, т.е. на 18.

Второе условие следует из следующего: во-первых, ввиду условия $\overline{abc} = 6 \cdot (a + b + c)$ искомое число должно делиться на 6, т.е. на 2, и на 3. Из делимости числа на 3 следует, что сумма цифр числа делится на 3, но тогда само число делится даже на 9. Окончательно получаем: искомые числа обязательно делятся на 18.

Чисел, удовлетворяющих условиям (1) и (2) всего 4: 108, 126, 144, 162 и для них условие задачи, очевидно не выполняется.

Б) Для дальнейшего осталось заметить, что условие (1) для 4-хзначных чисел выглядит так: «искомые 4-хзначные числа не превосходят $6\times4\times9 = 216$», но на самом деле любое 4х-значное число не меньше, чем $1000 = 10\times10\times10$, что невозможно;

для 5-значных чисел так: «искомые 5-значные числа не превосходят $6\times5\times9 = 270$», но 5-значные числа не меньше, чем $10000 = 10\times10\times10\times10$;

И так далее, для k-значных чисел выполняется: по условию (1) они неп превосходят $6\times k\times9$, но любое k-значное число не меньше, чем $10\times10\times\ldots\times10$, где в произведении стоит k десяток. Ясно, что такое выполниться не может.

Отсюда следует, что чисел, удовлетворяющих условию, больше не существует.

4. В стране Головоломка сконструировали большой кубик Рубика из 26 маленьких игральных кубиков, в которых каждому цвету соответствует свое число (см. на рис. 1 развертку одного игрального кубика). Барон Мюнхгаузен видит одну грань такого кубика Рубика (см. рис. 2) и говорит: «А я могу найти сумму чисел на всех гранях игральных кубиков, из которых состоит кубик Рубика и которые я не вижу!» Прав ли барон Мюнхгаузен, и если да, то чему равна такая сумма?

Примечание. В кубике Рубика вместо внутреннего кубика стоит механизм вращения, поэтому в его конструкции 26 маленьких кубиков.

Рис.1

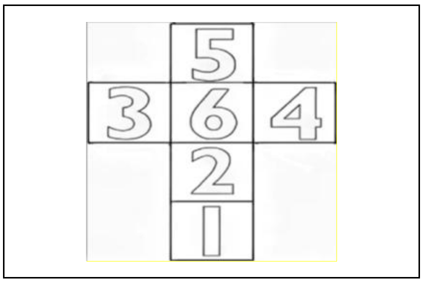


Рис.2

5	5	5
5	6	5
5	5	5

Ответ. 500.

Первое решение. Решение: Мюнхгаузен прав. Заметим, что у кубика сумма цифр на любых двух противоположных гранях равны между собой – 7. Исходя из этого, подсчитаем общую сумму всех очков. Если на верхней (видимой бароном) грани кубика стоит цифра 5, то на нижней будет число 2. Тогда сумма в «столбике» состоящем из трёх игральных кубиков с верхней цифрой 5 будет равна: 2+7+7=16, а с верхней цифрой 6: 1+7=8 (центрального кубика нет). Тогда сумма цифр со стороны видимой грани будет: 8*16+8=136. Суммы чисел со стороны боковых граней равны между собой: 9*3*7-7= 182 (по 9 кубиков на грани, под каждым по 3 кубика с суммой на каждых противоположных гранях 7 минус один центральный кубик). Тогда общая сумма будет 136+2*182=500.

Второе решение (проще): Так как каждый кубик дает вклад, в общую сумму7*3 =21 (сумма 7 на каждых двух противоположных гранях, а всего 3 пары граней). Тогда общая сумма будет равна 21*26=546. А сумма на всех невидимых гранях будет равна 546-5*8-6=500.

5. Три мудреца попали в заточение к царю Гороху. У них есть золотые монеты: у первого 5 монет, у второго – 16 монет, у третьего – 100 монет. Царь сказал, что готов выпустить всех троих, если кто-то из них готов отдать все свои монеты (либо показать, что у него совсем нет монет), и дал им время подумать.

   Мудрецы могут брать друг у друга монеты по правилу: любой из них может удвоить количество своих монет, взяв, если это возможно, необходимое число монет у кого-то из двух других мудрецов, и они могут выполнять такую операцию неоднократно. Какое наименьшее число монет могут мудрецы отдать царю, чтобы обрести свободу? Ответ обосновать.

Ответ: 0 монет.

Решение: сначала сделаем так, чтобы у одного из мудрецов была 1 монета:

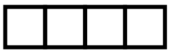
(5, 16, 100) → (10, 11, 100) → (20, 1, 100) = **(16+4, 1, 1+2+8+99)**,

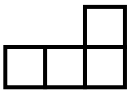
а далее: среднее число 1 все время удваиваем, используя числа 1, 2, 4, 8, 16, стоящие в ОПРЕДЕЛЕННОМ порядке справа и слева от него, тогда будем получать степени двойки 2, 4, 8, 16, 32 и на этом ходу слева окажется 0:

$\to (20, 2, 99) \to (20, 4, 97) \to (16, 8, 97) \to (16, 16, 89) \to (0, 32, 89)$.

Идея основана на том, что сначала получаем какое-то маленькое число (двойку), а затем другие числа представляем в виде суммы последовательных начальных степеней двойки (как в двоичной системе счисления). Кстати, при таких числах на следующем ходу можно было иметь уже два нуля.

6. а) Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник размером 10×30 клеток на фигурки двух видов: полосок 1×4 и перевернутой буквы «Г» (см. рисунок; фигурки можно поворачивать и переворачивать).





б) Найдите все пары натуральных m и n такие, что клетчатый прямоугольник $m \times n$ можно разрезать на фигурки этих двух видов.

Примечание. Фигура разрезается полностью, и никаких кусочков кроме этих фигурок не остается.

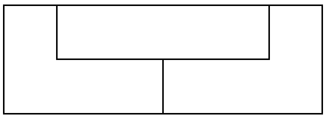
Ответ: а) Да,

б) все пары (m, n) такие, что произведение mn кратно 4, кроме $m = n = 2$.

Решение. а) Сначала отрежем от большого прямоугольника 10×30 клеток два прямоугольника размером 4×30 клеток, каждый из которых очевидно, режется на полоски 1×4. А оставшийся прямоугольник 2×30 клеток – это пять прямоугольников 4×6 клеток, которые можно разрезать так, как указано ниже. (Возможны другие способы разрезания).

б) Очевидно, что произведение чисел m и n должно делиться на 4. Если длина одной из сторон прямоугольника делится на 4, то, очевидно, прямоугольник можно замостить одними полосками 1×4. Осталось рассмотреть случай, когда длины обеих сторон прямоугольника делятся на 2, но не делятся на 4.

Очевидно, что квадрат 2×2 замостить невозможно. Прямоугольник 2×6 замостить можно:



Заметим, что если прямоугольник $m \times n$ замостить можно, то можно замостить и прямоугольник $m \times (n + 4)$ (поскольку прямоугольник $m \times 4$ можно замостить полосками 1×4). Нетрудно видеть, что с помощью такой операции можно перейти от замощения прямоугольника 2×6 к замощению любого прямоугольника $m \times n$, длины сторон которого являются четными числами, не кратными 4, если хотя бы одна из сторон больше 2