XXVI ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (27 апреля 2019 года) 7-**8 классы**

ВНИМАНИЕ.

1. Пользоваться калькулятором не разрешается.
2. Завтра – 28 апреля 2018 г. в 10.10 в ауд. 521 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. В результате эксперимента впробирке размножаются бактерии. За сутки каждая бактерия делится пополам, и вместо одной бактерии появляются две, равные по величине исходной. Ещё через сутки каждая из имеющихся в пробирке бактерий снова делится пополам и так далее. Через 100 суток пробирка полностью заполнилась бактериями. Через какое время от начала эксперимента бактерии заполнили ровно 12,5% объема пробирки?
2. Незнайка записал 2019-значное число, не содержащее нулей. Потом переставил каким-то образом цифры и сложил с первоначальным числом. В итоге получилось число, состоящее только из единиц. Ошибся ли Незнайка?
3. Дан четырехугольник *ABCD,* у которого *BC*= 26 и *AD*= 62. Также известно, что сторона *BC* параллельна *AD*. Можно ли данный четырехугольник разрезать на равные треугольники?
4. Дан набор из чисел 1, 2, 3, 4, 5. На каждом ходу из имеющегося набора можно выбрать два числа a и b и заменить их на числа $3a + 2b$ и$a - 4b$. Можно ли после нескольких ходов получить набор чисел 2019, 2020, 2021, 2022, 2023?
5. Земельный участок представляет собой квадрат со стороной 1 км, который разбит на маленькие участки-квадраты со стороной 100 м. Известно, что в левом верхнем квадрате со стороной 500 м растет лес, а на остальной части всего участка – трава. Несколько дачников хотят разделить весь участок между собой так, чтобы во владении каждого из них был связный участок, в котором площадь, занятая лесом, была в три раза меньше, чем площадь, занятая травой. На какое наибольшее количество дачников можно разделить участок указанным образом? (Участки дачников не обязаны быть равными или даже равновеликими, делить можно только по границам маленьких квадратиков со стороной 100 м, *связность участков дачников означает, что из любого маленького квадратика участка можно перейти в любой другой квадратик этого же участка, оставаясь внутри него, и переходя из квадратика в квадратик через их общую сторону.*)
6. Упросить выражение (ответ является целым или рациональным числом и не содержит знаков сложения и умножения)
$$\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{2019^2+1}{2019^2-1}.$$
7. В городе 200 станций метро, некоторые из которых соединены между собой туннелями. Известно, что от любой станции можно доехать до любой другой (возможно, с пересадками). Получится ли у туриста побывать на каждой станции, совершив не более а) 398 переездов? б) 396 переездов?

Решения

1. **Ответ:** через 97 дней.
   Так как пробирка была заполнена через 100 дней, то через 99 дней она была заполнена наполовину (т.е. на 50%), через 98 дней – на четверть (т.е. на 25%), а через 97 дней – на одну восьмую (т.е. на 12,5%).

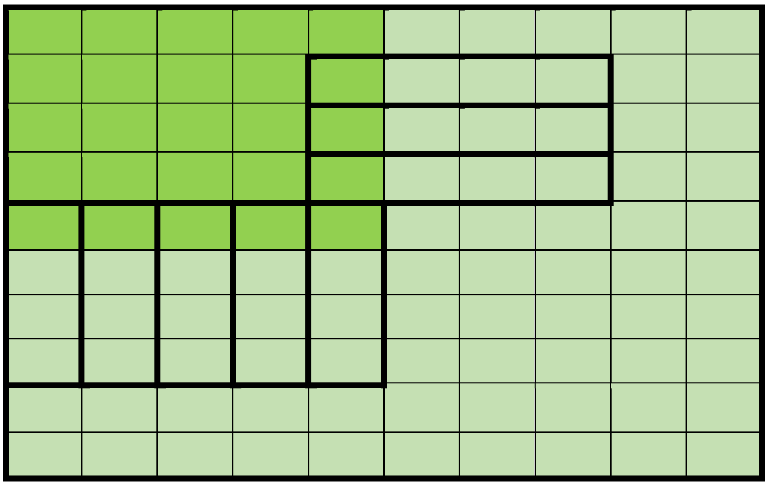
2. **Ответ:** Незнайка ошибся.
   Записанное Незнайкой число обозначим $n = \overline{a_{2019} a_{2018} \dots a_2 a_1 a_0}$, а число с переставленными цифрами $-\overline{b_{2019} b_{2018} \dots b_2 b_1 b_0}$. По условию $\overline{a_{2019} a_{2018} \dots a_2 a_1 a_0}$ $+\overline{b_{2019} b_{2018} \dots b_2 b_1 b_0}$ = 11111…111 (2020 единиц). Рассмотрим сложение этих чисел по разрядам (в столбик):
   $$a_0 + b_0 = 11,\ a_1 + b_1 = 10,\ a_2 + b_2 = 10, \dots, a_{2019} + b_{2019} = 10.$$
   Сложим последние равенства:
   $$a_0 + a_1 + \dots + a_{2019} + b_0 + b_1 + \dots + b_{2019} = 11 + 10 \cdot 2018$$
   Отметим, что слева стоит удвоенная сумма цифр числа n, т.е. число четное, а справа – число нечетное.

3. **Ответ:** возможно.
   Заметим, что *ABCD* – трапеция с основаниями *BC* и *AD*. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения и разобьём каждую сторону получившегося треугольника на 62 равные части. Через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам треугольника, и по теореме Фалеса получим разбиение треугольника на равные маленькие треугольники. Верхнее основание трапеции является одной из проведённых линий, так как его длина 26, то есть выражается целым числом. Таким образом, мы получили разбиение трапеции на равные треугольники.

   Источник: http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=105074

4. **Ответ:** нельзя.
   Заметим, что если пара чисел a и b заменяется на пару чисел $3a + 2b$ и $a - 4b$, то сумма a+b заменяется на сумму $(3a + 2b) + (a - 4b) = 3(a - b) + a + b$.Таким образом, остаток суммы всех чисел набора при делении на 3 не изменяется при указанной операции. Так как сумма чисел исходного набора делится на 3, а сумма чисел конечного набора имеет при делении на 3 остаток 1 (0+1+2+0+1), то получить конечный набор из исходного нельзя.

5. **Ответ:** 9 участков.
   Разобьем весь участок на 100 участков-клеточек со стороной 100 м. Так как все владения должны быть связными, а также содержать и траву, и лес, то каждый дачник владеет клеткой, покрытой лесом, которая граничит с клеткой, на которой растет трава. А таких клеток всего 9, поэтому дачников может быть не более девяти. Пример для 9 участков приведен ниже:



Источник: http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=65718

6. **Ответ:** $1009\frac{1009}{2020}$.
Преобразуем исходное выражение

$$\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{2019^2+1}{2019^2-1}=$$
$$=1+\frac{2}{3^2-1}+1+\frac{2}{5^2-1}+1+\frac{2}{7^2-1}+\cdots+1+\frac{2}{2019^2-1}=$$
$$=1009+\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{4\cdot6}+\frac{2}{6\cdot8}+\cdots+\frac{2}{2018\cdot2010}=$$
$$=1009+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2020}\right)=$$
$$=1009+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=1009\frac{1009}{2020}.$$

7. **Ответ:** а) может; б) может.
Докажем сразу пункт б), из которого следует пункт а)
б) Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют станциям, а две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие станции соединены туннелем. В данном графе выделим *дерево*, содержащее все вершины исходного графа (под деревом понимаем связный граф без циклов). Такое дерево можно построить следующим образом: рассмотрим произвольный цикл в исходном графе и удалим любое его ребро. Ясно, что после такой операции граф останется связным, а число его циклов уменьшится хотя бы на единицу. Всего в исходном графе конечное количество циклов, поэтому последовательно «разрушая» их указанным образом в конце концов придем к связному графу без циклов, содержащему все вершины исходного графа.

Докажем по индукции, что в дереве с n вершинами существует обходящий все вершины маршрут длины не более $2n$-4. База для n=3 очевидна. Рассмотрим произвольную вершину u степени 1 (легко можно показать, что в любом дереве такая имеется). Удалим u вместе с выходящим из нее ребром uv. Получили дерево с (n-1) вершиной и по предположению индукции в нем есть искомый маршрут дины не более 2(n-1)-4 = $2n$-6. Вставим в этот маршрут ребра vu и uv и получим маршрут длины не более $2n$-4, проходящий по всем вершинам дерева.

Источник: http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30794

При составлении некоторых задач были использованы следующие источники:

1. Международный математический Турнир Городов https://www.turgor.ru
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.Ленинградские математические кружки, 1994.