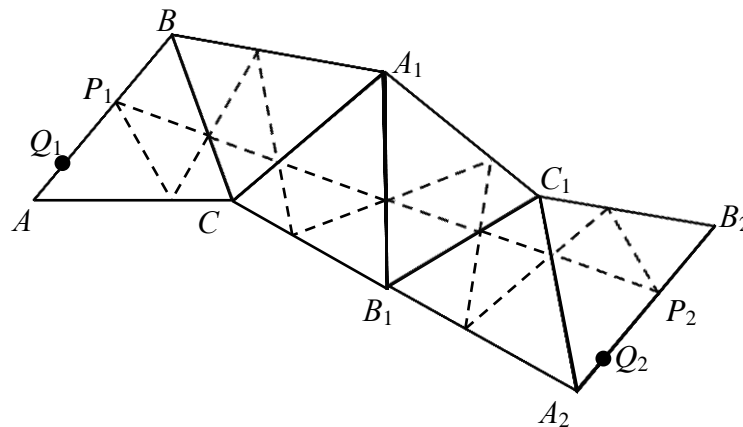


ГЕОМЕТРИЯ: ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

1. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A , на другой – точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.
2. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N . Пусть A и B – точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN . Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.
3. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$. Внутри угла ACB взята некоторая точка X .
 - а) Докажите, что $XA + XB \geq \sqrt{2}XC$.
 - б) Найдите геометрическое место точек X внутри угла ACB , для которых $XA + XB = \sqrt{2}XC$.
4. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . На дуге AB окружности взята точка D . Докажите, что $DA + DB = DC$.
5. Найдите геометрическое место точек M , лежащих внутри правильного треугольника ABC и таких, что имеет место равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$.
6. На сторонах прямоугольника $ABCD$ отметили точки P, Q, R, S . Докажите, что периметр четырехугольника $PQRS$ не меньше суммы длин диагоналей прямоугольника $ABCD$.
7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q , причем периметр APQ равен 2. Докажите, что $\angle PCQ = 45^\circ$.
8. ABC – равносторонний треугольник, P – середина стороны AB . Как отметить точки Q и R на сторонах AC и BC соответственно таким образом, чтобы периметр треугольника PQR получился наименьшим?
9. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что у четырехугольника с вершинами в центрах этих квадратов диагонали перпендикулярны и равны.



Разная геометрия

10. Из города A в город B ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений. Докажите, что если две машины M_1 и M_2 могут выехать одновременно из A по этим дорогам и проехать в B так, что расстояние между машинами ни в какой момент не будет превосходить 20 м, то две круглые платформы радиусом в 11 м не смогут проехать одновременно из A в B и из B в A и проехать по этим дорогам, не столкнувшись.
11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD . Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB .
12. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC , в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.
13. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем отрезки KM и LN параллельны сторонам параллелограмма и пересекаются в точке O . Докажите, что площади параллелограммов $KBLO$ и $MDNO$ равны тогда и только тогда, когда точка O лежит на диагонали AC .
14. Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки KM и LN пересекаются в точке O . Докажите, что $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}$.
15. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Отрезки MM_1 и NN_1 – биссектрисы треугольника AMN . Докажите, что $M_1N_1 \parallel BC$.
16. Точка пересечения высот остроугольного треугольника равноудалена от середин его сторон. Докажите, что треугольник равносторонний.