Исследовательские задания
XX республиканского турнира юных математиков,

4-9 декабря 2018 года

Внимание. В случае обнаружения опечаток, двусмысленностей и других неточностей, а также в случае возникновения вопросов по условиям просим обращаться по адресам электронной почты (или по телефонам), указанным в объявлении.

Важные указания к порядку решения и оформления исследований по заданиям турнира юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер (в отличие от олимпиадных задач). Полные решения и наилучшие обобщения этих задач неизвестны даже авторам, поэтому:

- необходимо **по возможности максимально полно** исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач <u>интерес представляют даже ***отдельные частные случаи*** *заданий (их пунктов или небольших значений параметров)*</u>;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки <u>*полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования **НЕОБЯЗАТЕЛЬНО** должны совпадать с предложениями авторов</u>;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** в распечатанном виде **в <u>двух экземплярах</u>** (до 30 стр. формата А4), а также в электронной форме (образец названия файлов «Brest-gym17-2018-problem7-predvar», объем до 3 MB, если иное не согласовано с оргкомитетом), при этом:
    - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
    - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте <u>ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ</u> (утверждения, примеры, гипотезы);
    - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования).

Задача 1. Интересные аргументы

Будем говорить, что число A заканчивается на число B, если последние цифры в десятичной записи числа A образуют десятичную запись числа B. Например, число 170123 заканчивается на числа 170123, 70123, 123, 23, 3. Рассмотрим некоторую функцию f: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$. Будем говорить, что число n – интересное для функции f, если $f(n)$ заканчивается на n.

1) Верно ли, что для любого множества чисел $M \subset \boldsymbol{N}$ можно построить такую функцию f, что M будет множеством интересных значений для этой функции?
2) Найдите все интересные значения для функции $f(n) = n^2$, не превосходящие 1000. Постарайтесь определить некоторые необходимые условия интересности значения, чтобы избежать перебора 999 вариантов.
3) Существует ли такое $t \in N$, что все однозначные числа являются интересными для функции $f(n) = n^t$? Если да, попробуйте описать все такие t.
4) Верно ли, что для любого $t \in N$ множество интересных чисел функции $f(n) = n^t$ бесконечно? Если да, предложите как можно больше бесконечных серий интересных чисел для каждого t. Существует ли числа, которые являются интересными для функции $f(n) = n^t$ при всех t?
5) Для всех $k \in N$ определите множество интересных значений для функции $f(n) = n + k$.
6) Попробуйте описать множества интересных чисел для функций вида $f(n) = an + b$, где a и b – некоторые целые неотрицательные числа. По аналогии рассмотрите многочлены более высоких степеней.
7) Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их. Некоторые из возможных направлений:

   а) рассмотрите другие системы счисления, в частности, интерес представляют системы счисления с основанием p, где p – простое число;

   б) рассмотрите функции другого вида, например, $g(n) = 2^n$.

Задача 2. Разговорчивые великаны

1. На математическом острове живёт племя великанов. Великаны говорят только «Эх» и «Ыx», причём по определённым правилам. Например, великан по имени Простая Половинка всякий раз с вероятностью ½ произносит «Эх» и с вероятностью ½ – «Ыx».
   1.1. Великан Простая Половинка сказал 4 слова (10 слов). Какова вероятность того, что последнее слово было «Эх»? Какова вероятность того, что из этих слов *ровно* половина было «Эх»? Какова вероятность того, что *хотя бы* половина из них было «Эх»?
   1.2. Пусть m и n – натуральные числа. Великан Простая Половинка произнёс $m + n$ слов. Какова вероятность, что ровно m из них – слово «Эх»?

1.3. Какова вероятность того, что в монологе длины n великана Простая Половинка не встретится дважды подряд слово «Эх»?

2. Великан по имени Простая Альфа-Бета с вероятностью α произносит «Эх» и с вероятностью β – «Ых» ($0 \le \alpha \le 1$ и $\alpha + \beta = 1$). Ответьте для него на вопросы пунктов 1.1 – 1.3.
3. Великан по имени Половинка после слова «Эх» всегда говорит «Ых». А после слова «Ых» – с вероятностью $1/2$ произносит «Эх» и с вероятностью $1/2$ – опять «Ых». Будем считать, что первое слово каждого своего монолога великан Половинка выбирает равновероятно.

   3.1. Сколько разных монологов из 4 слов (10 слов) может сказать великан Половинка? Будем говорить также, что эти монологи имеют длину 4 или 10.

   3.2. Великан Половинка сказал десять слов. Какова вероятность того, что Половинка говорил только «Ых»? Какова вероятность того, что он методично чередовал «Эх» и «Ых»?

   3.3. Какова вероятность того, что последнее слово монолога будет «Эх»?

   3.4. Ответьте на эти вопросы для монологов длины n.
4. Пусть M_n – множество всех монологов длины n. Для каждого монолога $x \in M_n$ можно определить вероятность $P(x)$ того, что произнесённый великаном Половинка монолог длины n окажется именно монологом x. Будем обозначать ЫХ(x) количество слов «Ых» в монологе x. Интересно рассмотреть величину:
$$S_n = \sum_{x \in M_n} P(x) ЫХ(x).$$
Это величина – математически ожидаемое количество слов «Ых» в монологе великана Половинка.

   4.1. Найдите S_n хотя бы для некоторых n. Возможно, вам удастся построить рекуррентное соотношение для S_n.

   4.2. Возможно, вы сможете определить предел отношения $\frac{S_n}{n}$ при длине монолога, стремящейся к бесконечности.

   4.3. Попробуйте ответить на аналогичные вопросы для великана Альфа-Бета (предварительно определив правила, по которым он разговаривает).
5. Можно сказать, что великан Половинка избегает словосочетания «ЭхЭх»: он выбирает каждое новое слово своего монолога равновероятно из всех тех вариантов, которые не породят словосочетание «ЭхЭх». Исследуйте также великанов, избегающих словосочетаний «Эх ЭхЭх» или «Эх ЭхЭхЭх».
6. Обобщите полученные результаты для великанов, имеющих более богатый словарный запас.

<u>Задача 3. Заряды</u>

Перед вами — N металлических электрически заряженных шариков, лежащих по отдельности. Заряды разных шариков могут быть различны, но известно, что сумма зарядов всех N шариков равна нулю. Есть также некоторое множество допустимых чисел S. Разрешается сколько угодно раз делать следующую операцию:

выбрать число k из S, взять любые k шариков и "сжать в кулаке": соединить эти шарики так, чтобы их заряды уравнялись (соответственно, если заряды этих k шариков были $a_1, a_2,..., a_k$, то после операции все шарики будут иметь заряд, равный среднему арифметическому $a_1, a_2,..., a_k$). После операции шарики разъединяются и раскладываются по исходным позициям, не касаясь других шариков. Обратите внимание, что для разных операций разрешается выбирать разные значения k из S.

Назовем пару (N, S) из числа N и множества S *обнуляемой*, если вне зависимости от исходных зарядов шариков всегда можно сделать все заряды нулевыми и *необнуляемой* в противном случае.

1. Покажите, что следующие пары обнуляемые:
   - 1.1. $N = 4$, $S = \{2\}$;
   - 1.2. $N = 2^m$ (m – натуральное число), $S = \{2\}$;
   - 1.3. $N = 2^m$, $S = \{2^k\}$, m и k – натуральные, $m \geq k$;
   - 1.4. $N = 12$, $S = \{2, 3\}$;
   - 1.5. N – произвольное натуральное число, S – множество простых чисел;
   - 1.6. $N = 20$, $S = \{5, 6\}$.

2. Покажите, что следующие пары необнуляемые:
   - 2.1. $N = 3$, $S = \{2\}$;
   - 2.2. N – натуральное, $S = \{N – 1\}$, $N \geq 4$;
   - 2.3. $N = 5$, $S = \{2\}$;
   - 2.4. N – произвольное чётное число, S – множество нечётных чисел.

3. Сформулируйте как можно больше условий, позволяющих относить пары (N, S) к обнуляемым или необнуляемым. В идеале – сформулируйте критерий обнуляемости пары (N, S). Интерес представляют как общие необходимые или достаточные условия, так и какие-то частные случаи, например, случай, когда S состоит из одного элемента.

4. Рассмотрим обнуляемые пары (N, S). Через $f(N,S)$ обозначим минимальное число операций, за которое гарантировано можно сделать все заряды шариков нулевыми (т.е. даже в самом худшем случае). Найдите или оцените $f(N,S)$ для пар из пункта 1, а также любых других обнуляемых пар.

5. Рассмотрим необнуляемые пары (N, S) из пункта 2. Попробуйте определить для каждой пары, каким необходимым и (или) достаточным условиям должны удовлетворять исходные заряды шариков, чтобы было возможным сделать все заряды нулевыми. Ответьте на этот же вопрос для других необнуляемых пар.

6. Предложите свои обобщения и частные случаи задачи и исследуйте их.

Задание 4. Воздушная разведка

На авианосце базируется самолеты двух типов: самолеты-разведчики и самолеты-заправщики. Заправку можно производить только на авианосце и в воздухе. При заправке в воздухе из баков одного самолета-заправщика в баки любого другого самолета (самолета-разведчика или другого самолета-заправщика) можно перекачивать любое количество горючего. Баки самолета-заправщика используются как для заправки других самолетов, так и для обеспечения собственного полета. Для удобства решения задачи предполагается, что заправка на земле и в воздухе происходит мгновенно, без потерь времени и горючего.

1) Баки каждого самолета вмещают столько топлива, что его хватает на облет половины земного шара. Чему равно минимальное число самолетов-заправщиков, которые смогут обеспечить полет одного самолета-разведчика по большому кругу, если считать, что скорость и расход топлива у всех самолетов одинаковы и все самолеты благополучно возвращаются на свою базу?

2) А если баки вмещают топлива только на третью часть пути вокруг земного шара, скорость и расход топлива у всех самолетов одинаковы и все самолеты благополучно возвращаются на свою базу?

3) А если баки вмещают топлива только на $1/n$ часть пути вокруг земного шара, скорость и расход топлива у всех самолетов одинаковы и все самолеты благополучно возвращаются на свою базу?

4) Дайте ответ на пункты 1-3 если скорость самолета-разведчика в 2 раза больше скорости самолета заправщика?

5) Дайте ответ на пункты 1-3 если скорость самолета-разведчика в 3 раза больше скорости самолета заправщика?

6) Рассмотрите пункты 1-5 для случая, когда расход топлива самолета-разведчика в 2 раза больше расхода топлива самолета заправщика, баки у самолетов одинаковы. Данные пунктов 1-5 по дальности полета без заправки относятся к самолетам заправщикам.

7) Рассмотрите пункты 4 и 6 если отношения равны другим натуральным числам.

8) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 5. Кратчайшие цепочки остатков

Рассмотрим два целых числа ρ_0 и ρ_1. Рассмотрим итерации (последовательность операций — делений) алгоритма Евклида для ρ_0, ρ_1. Разделим с остатком ρ_0 на ρ_1. Имеем $\rho_2 = \rho_0 - \gamma_1 \rho_1$. Затем ρ_1 на ρ_2 с остатком: $\rho_3 = \rho_1 - \gamma_2 \rho_2$. И так далее получаем выражение для каждой следующей итерации $\rho_{i+1} = \rho_{i-1} - \gamma_i \rho_i$.

Будем далее рассматривать последовательность $\sum =< \rho_0, ..., \rho_n >$, где $\rho_i \in \mathbb{Z}$.

Будем говорить, что $\sum$ — **цепочка остатков** для ρ_0, ρ_1, если

— Для любого $1 \le i < n$ существует $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ такое, что $\rho_{i+1} = \rho_{i-1} - \gamma_i \rho_i$.

— $\rho_i \ne 0$ для $i < n$ и $\rho_n = 0$.

— Для любого $1 \le i < n$ выполнено $|\rho_{i+1}| < |\rho_i|$.

Цепочку остатков $\sum$ будем называть **минимальной** для ρ_0, ρ_1, если не существует цепочки остатков для ρ_0, ρ_1 меньшей длины.

Цепочку остатков $\sum$ будем называть **жадной** для ρ_0, ρ_1, если $\left|\rho_{i+1}\right| = \min\limits_{\gamma_i}\left|\rho_{i-1} - \gamma_i \rho_i\right|$.

Будем говорить, что $\sum$ — **обобщенная цепочка остатков** для ρ_0, ρ_1, если

— Для любого $1 \le i < n$ существует $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ такое, что $\rho_{i+1} = \rho_{i-1} - \gamma_i \rho_i$.

— $\rho_i \ne 0$ для $i < n$ и $\rho_n = 0$.

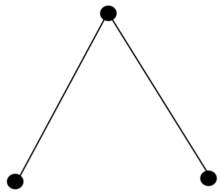
1. Для обычных и обобщенных цепочек остатков:
   1) Найдите все цепочки остатков длины 2, 3, 4 для $\rho_0 = m,\ \rho_1 = 1$, где $m \in \mathbb{Z}$.
   2) Найдите все цепочки остатков длины 2, 3, 4 для $\rho_0 = m,\ \rho_1 = n,$ где $n, m \in \mathbb{Z},\ n \ne 0, \pm 1$ или постройте алгоритм их нахождения. Оцените количество цепочек хотя бы для отдельных значений m, n.
   3) Рассмотрите вопросы 1.1 и 1.2 для произвольных длин цепочек.
2. Рассмотрим более известный вариант задачи. В этом пункте рассмотрим только цепочки остатков для которых $\rho_i \ge 0$.
   1) Пусть ρ_0, ρ_1— последовательные числа Фибоначчи. Докажите, что минимальная цепочка остатков для ρ_0, ρ_1 не меньше, чем минимальная цепочка остатков для любых $\rho'_0, \rho'_1 \in [1, \rho_0 + \rho_1)$. Верно ли это для жадной цепочки? Вычислите или оцените длину минимальной цепочки для ρ_0, ρ_1.
   2) Рассмотрим ρ_0, ρ_1 такие, что минимальная цепочка остатков имеет длину n. Докажите, что жадная цепочка остатков для этих чисел также имеет длину n. Начните с $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.
3. Верно ли, что жадная цепочка остатков является минимальной цепочкой для любых ρ_0, ρ_1 для кольца целых чисел $\mathbb{Z}$?
4. Найдите или оцените длину минимальной и жадной цепочки остатков для фиксированных ρ_0, ρ_1
5. Пусть $\rho_0, \rho_1 \in [1, N]$. Найдите такие ρ_0, ρ_1, что минимальная цепочка остатков имеет максимальную длину. Найдите общий способ построения таких чисел как в пункте 2.1. Найдите или оцените длину минимальной цепочки остатков для этих ρ_0, ρ_1. Рассмотрите аналогичный вопрос для жадной цепочки остатков.
6. Ответьте на вопросы 1–5 для обобщенной цепочки остатков.
7. Ответьте на аналогичные вопросы для кольца многочленов с действительными коэффициентами (в качестве модуля многочлена рассмотрите его степень) и для гауссовых чисел (в качестве модуля рассмотрите функцию $Nm(a+bi) = a^2 + b^2$.
8. Рассмотрим множество чисел (кольцо) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ следующего вида: его элементы это числа вида $a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}.$ При этом сложение и умножение происходит по правилам действительных чисел. В определении цепочки делений заменим сравнение

модулей на сравнение функций Nm от элементов, где $Nm(a+b\sqrt{2})=\left|a^2-2b^2\right|$. Ответьте на вопросы 1–5 для $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

9. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

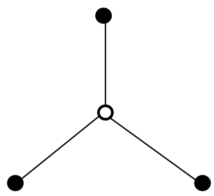
<u>Задача 6. Кратчайшие сети</u>

Пусть дано множество X из n точек на плоскости. Требуется соединить некоторые из них отрезками так, чтобы для любой пары точек существовала цепочка отрезков, по которой из одной точки можно попасть в другую. При этом суммарная длина получившейся сети отрезков должна быть как можно меньше.



Например, если X – вершины правильного треугольника, то сеть могла бы выглядеть так:

Однако бывает, что сеть можно укоротить, если не ограничиваться только отрезками между вершинами из X. Например, добавив еще один узел, получаем сеть для равностороннего треугольника, длина которой в $2/\sqrt{3}$ раз меньше, чем раньше:



Обозначим через $l_m(X)$ наименьшую возможную длину сети, построенной без дополнительных вершин, а $l_S(X)$ – с возможностью добавлять новые вершины.

1. Опишите все случаи, когда $l_m(X)=l_S(X)$ если
   а) $n=3$,
   б) $n=4$,
   в) n – произвольное.
2. Сколько дополнительных точек может понадобится для построения сети наименьшей длины? Ответьте на этот вопрос, если X :
   а) прямоугольник,
   б) правильный n-угольник,
   в) n точек, лежащих на окружности,
   г) произвольное множество из n точек.
3. Решите ту же задачу, если точки и сеть располагаются на
   а) единичном кубе,
   б) сфере радиуса 1,

в) плоскости, но отрезки сети могут быть только вертикальными или горизонтальными (соответственно, расстояние между точками x_1, y_1 и x_2, y_2 находится как $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$).

4. Попробуйте найти или оценить снизу отношение $\frac{l_S(X)}{l_m(X)}$ хотя бы для некоторых из описанных выше конфигураций n точек (фиксированных расположений этих точек).

4.1. Общий вопрос: пусть $r = \inf \frac{l_S(X)}{l_m(X)}$ по всем множествам X. Найдите или попробуйте оценить значение r. В каких случаях оно достигается?

5. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 7. Медианы многоугольников

Медианой четырёхугольника назовем отрезок, соединяющий какую-нибудь из его вершин с центром медиан треугольника, вершинами которого будут служить остальные три вершины четырёхугольника.

1. Докажите, что все четыре медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении 3:1 (считая от вершины).

2. Является ли данная точка (точка пересечения медиан четырехугольника) центром тяжести четырёхугольника?

3. Если две медианы четырёхугольника равны, то следует ли отсюда, что два угла в четырёхугольнике равны?

4. Дайте определение медианы n-угольника, по аналогии с медианой четырёхугольника. Сформулируйте теорему, аналогичную пункту 1, и докажите её.

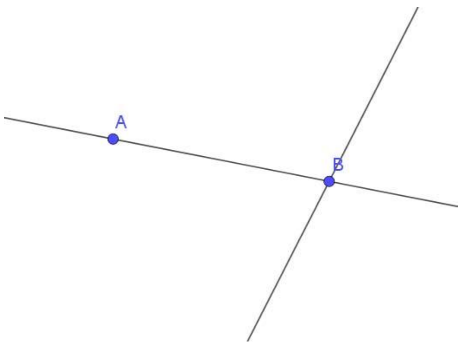
5. Исследуйте пункты 2–3 для медиан n-угольника.

6. Предложите и исследуйте свойства других отрезков и конструкций для других отрезков четырехугольников и n-угольников, определяемых по некоторой аналогии с треугольниками. (Например: пусть высота четырёхугольника – это отрезок, соединяющий вершину четырехугольника с ортоцентром треугольника, образованного остальными тремя вершинами. Пересекаются ли высоты четырёхугольника в одной точке? Если да, то в каком отношении они делятся точкой пересечения?)

Задача 8. Точки на прямых

Пусть у нас есть n точек и m прямых (никакие две прямые или две точки не совпадают). Для каждой точки мы считаем, сколько прямых через нее проходят и суммируем получившиеся значения по всем точкам. Нас интересует такое расположение прямых и точек, при котором данная сумма достигает наибольшего значения, при этом максимальную сумму мы обозначим как $I(m, n)$.

Для примера докажем что $I(2, 2) = 3$. Расположение точек и прямых, которое реализует данную сумму, представлено на картинке ниже. Через точку B проходят две прямые, через точку A одна прямая, следовательно, общая сумма 1+2=3. Очевидно, значение $I(2, 2)$ не может равняться 4, поскольку это означает, что каждая из двух прямых проходит через обе точки, и следовательно, прямые совпадают.



1. Вычислите значения $I(3, 3)$ и $I(4, 4)$.
2. Найдите $I(m, n)$ для m =3, 4, 5.
3. Докажите равенство $I(m, n)$= $\mathrm{I}(n, m)$.
4. Докажите оценки:
   (a) $I(2k, k^2) \geq 2k^2$.
   (b) $I(4k^3, 4k^3) \geq 4k^4$.
5. Предложите какие-либо оценки на $I(m, n)$ и докажите их\.
6. (a) Покажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I(n,n)}{n^2}$ существует, то он меньше единицы.
   (b) Правда ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I(n,n)}{n^2} = 0$?
   (c) Оцените (или найдите точное значение) такое максимальное α, что
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{I(n,n)}{n^{\alpha}} \neq 0.$$
7. Исследуйте аналогичные задачи для n точек и m окружностей на плоскости.
8. Сформулируйте и исследуйте аналогичные задачи для n точек, m окружностей и l прямых.
9. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 9. Периодические функции-2

Во всех рассматриваемых пунктах речь идет о функциях, определенных на всей числовой прямой.

1. а) Приведите пример функции, график которой имеет две непараллельные между собой оси симметрии.

б) Докажите, что если график функции имеет две оси симметрии, параллельные оси Oy, то функция является периодической.

в) Для любого действительного числа x и некоторых действительных p и q ($p \neq q$) отличных от нуля функция f удовлетворяет соотношениям

$$f(x+p) = f(p-x), \quad f(x+q) = f(q-x).$$

Докажите, что функция f — периодическая.

г) Приведите пример периодической функции, график которой не имеет оси симметрии.

2. а) Докажите, что если график функции имеет два центра симметрии, лежащие на одной прямой, параллельной оси Ox, то функция является периодической.

б) Будет ли функция периодической, если ее график имеет три центра симметрии, не лежащих на одной прямой?

3. Исследуйте вопрос периодичности функции, если ее график имеет ось симметрии и центр симметрии; ось симметрии и два центра симметрии; центр симметрии и две оси симметрии и т.д.

4. а) Для любого действительного числа x и некоторого действительного $p \neq 0$ функция f удовлетворяет соотношению

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1}.$$

Докажите, что функция f — периодическая.

б) Для любого действительного числа x и некоторого действительного $p \neq 0$ функция f удовлетворяет соотношению

$$f(x+p) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Докажите, что функция f — периодическая.

в) Для каких α, β, γ из того, что для любого действительного числа x и некоторого действительного $p \neq 0$ функция f удовлетворяет соотношению

$$f(x+p) = \frac{f(x)+\alpha}{\beta f(x)+\gamma},$$

следует, что функция f — периодическая?

5. а) Для любого действительного числа x периодическая функция f удовлетворяет соотношению $\sqrt{2} f(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Чему равен период функции?

б) Существует ли непериодическая функция, удовлетворяющая этому соотношению?

в) Для любого действительного числа x периодическая функция f удовлетворяет соотношению $pf(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Чему равен период функции, если $p = \sqrt{3}$? А если p — произвольное действительное число?

6. Для любого действительного числа x и некоторого действительного $p \neq 0$ функция f удовлетворяет соотношению $f(x+p) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$. Докажите, что функция f — периодическая. Приведите пример такой непостоянной функции при $p = 1$.

7. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 10. Рыночные открытия

Введение. Везде в этой задаче под **Упаковкой** $(\mathcal{P})$ понимается множество попарно непересекающихся дисков на плоскости с радиусами из заданного подмножества $\mathbb{R}$. Говоря неформально, некоторое размещение на плоскости кругов с фиксированным радиусом.

Плотность упаковки δ – величина $\delta = \lim_{k\to\infty} \inf \frac{\text{покрытая дисками площадь}}{k^2}$

(В формуле инфимум берется по всем квадратам со стороной k.)

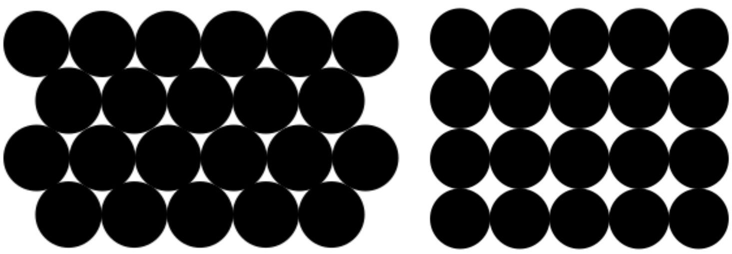
Интуитивно плотность упаковки можно понимать, как среднее отношение площади покрытой дисками ко всей площади произвольно выбранного квадрата на плоскости.

Назовем k**-короной** множество из k дисков $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ таких, что γ_i касается γ_{i+1} для $i = 1, 2, ..., k-1$, а γ_k касается γ_1, причем внутри многоугольника, образованного замкнутой ломанной, последовательно соединяющей центры дисков, лежит ровно один диск, отличный от дисков короны, и он касается всех дисков короны. Этот диск назовем **центром** k**-короны**.

Упаковку назовем **треугольной**, если каждый ее диск является центром некоторой короны.

Постановка задачи.

0.а. Вычислите плотности двух ниже приведенных упаковок:



b. Докажите, что максимальная плотность упаковки дисков единичного радиуса на $\mathbb{R}^2$ равна $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

1. Упаковку будем называть периодической с парой векторов-периодов u и v, если любой диск из упаковки, перенесенный на любой из векторов множества $\{u, -u$ $v, -v\}$, совпадает с некоторым другим диском упаковки. (плохо была сформулирована фраза)

a. Найдите все возможные $R \in \mathbb{R}$, для которых существует треугольная периодическая упаковка дисками радиуса R с периодами $2,0$ и $(1,\sqrt{3})$. Здесь допускается ответ в виде множества всех значений некоторой функции от нескольких целых переменных.

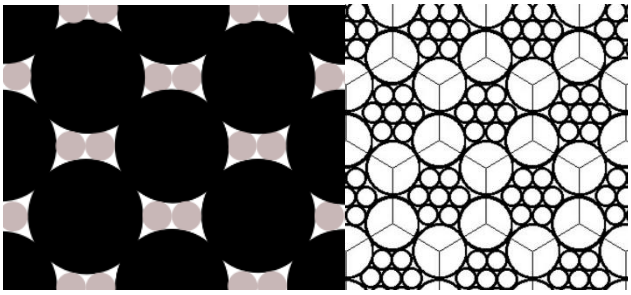
b. Приведите пример треугольной упаковки дисками радиусов 1 и некоторого $r<1$, которая не является периодической ни для какой пары векторов-периодов.

c. Пусть дана треугольная упаковка плоскости дисками радиусов 1 и $r<1$ такая, что нельзя добавить диск радиуса 1 или r так, чтобы он не пересек уже имеющийся. Может ли такая упаковка не являться периодической? В случае утвердительного ответа попробуйте классифицировать такие непериодические упаковки.

2. Здесь и далее рассматриваются упаковки дисками двух радиусов: 1 и $r<1$.

a. Приведите пример треугольной упаковки при $r=\sqrt{2}-1$.

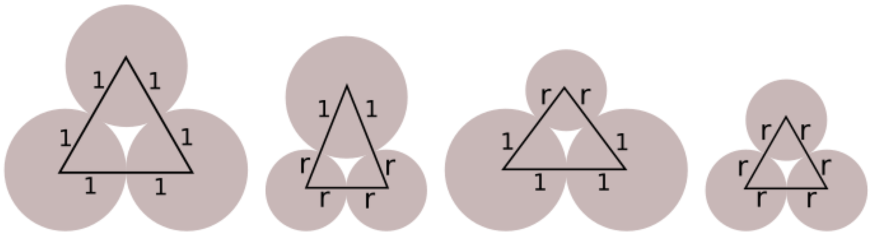
b. Вычислите радиус r меньшего диска и плотность для следующих двух упаковок:



c. Существует ли для некоторого r упаковка дисками двух радиусов (как и ранее, радиусы 1 и $r<1$) плотности, большей 99%?

d. Конечно ли количество радиусов r, для которых существует треугольная упаковка дисками радиусов 1 и r? Найдите все или приведите бесконечную серию.

3. Рассмотрим следующие четыре треугольника, образованные попарным соединением центров трех дисков (все возможные комбинации дисков радиусов 1 и $r<1$). Для них определим величину Γ как отношение площади внутри треугольника покрытой тем или иным диском ко всей площади треугольника. Для какого из этих четырех случаев величина Γ принимает максимальное значение?



Для треугольной упаковки покажите, что ее плотность $\delta \le \Gamma_{max}$. Попробуйте доказать это и для произвольной упаковки.

4. a. Конечно или нет количество множеств $\{1, r_1, r_2\}(1 > r_1 > r_2)$ таких, что для дисков указанных радиусов $(1, r_1, r_2)$ существует треугольная упаковка.

b. Аналогичный вопрос для n дисков ($n > 3$) различных радиусов.

c. Рассмотрите аналогичные вопросы для упаковок, не являющихся треугольными, но не допускающих добавления еще хотя бы одного диска.

5. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 11 Системы алгебраический уравнений

1. Решите системы уравнений: а) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y = 0, \\ 2x^2 - xy + y^2 - 6x + 2y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^3 - 2xy^2 + y^3 - 8x^2 + 4xy - y^2 + 6x - 2y = 0, \\ x^2 + xy - y^2 - 3x + 2y = 0. \end{cases}$

Алгебраической кривой n-го порядка на плоскости называется множество точек, описываемое одним алгебраическим уравнением n-й степени, то есть уравнением вида:

$$P(x, y) = \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j = 0,$$

причем хотя бы одно из чисел $a_{ij} c \cdot i + j = n$ не равно нулю. Будем говорить, что такая кривая *неприводима*, если многочлен $P(x, y)$ не раскладывается на (непостоянные) множители. Для любой точки (x_0, y_0), лежащей на такой кривой, перепишем уравнение $P(x, y) = 0$ в виде:

$$P(x, y) = \sum_{i+j \le n} b_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j = 0.$$

Так как $P(x_0, y_0) = 0$, то $b_{00} = 0$. Если хотя бы одно из чисел b_{10} или b_{01} не равно нулю, то касательной к заданной кривой в точке (x_0, y_0) называется прямая, заданная уравнением $b_{10}(x - x_0) + b_{01}(y - y_0) = 0$. Если же $b_{10} = b_{01} = 0$, то мы говорим, что касательная в точке x_0, y_0 не определена.

2. а) Предложите общий метод решения системы двух алгебраических уравнений, одно из которых имеет степень 2, а второе – произвольную степень $n \geq 2$, сведя решение такой системы к решению одного алгебраического уравнения от одной переменной. (Указание: используйте аналог рациональной параметризации единичной окружности: $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$ обобщив его на случай произвольной алгебраической кривой 2-го порядка.)

б) Докажите, что у такой системы уравнений либо бесконечное число решений, либо их не более $2n$. (Указание: используйте тот факт, что алгебраическое уравнение степени k на одну переменную имеет не более k корней.)

в) Докажите, что неприводимая кривая 2-го порядка и неприводимая кривая n-го порядка не могут пересекаться в бесконечном числе точек, и, следовательно, имеют не более $2n$ точек пересечения.

3. а) Для кривой $y^2 = x^3 - x$ опишите геометрические места точек, через которые проходят 0, 1, 2, 3 касательные прямые. Докажите, что не существует точек, через которые проходят 4 касательные прямые.

б) Докажите, что для заданной алгебраической кривой n-го порядка через каждую точку плоскости можно провести не более n касательных прямых.

4. Будем говорить, что две (неприводимые) *кривые касаются* в одной из точек пересечения, если у них в этой точке касательные прямые существуют и совпадают.

a) Докажите, что неприводимые кривые 2-го порядка не могут иметь более двух различных точек касания.

b) Существуют ли две неприводимые кривые второго порядка, которые касаются в одной точке и пересекаются (но не касаются!) еще в одной точке и не имеют других точек пересечения.

5. a) Докажите, что неприводимые кривые 2-го и 3-го порядка не могут иметь более трех различных точек касания.

b) Постройте пример двух таких кривых, имеющих три различных точки касания.

c) Существуют ли такие неприводимые кривые второго и третьего порядка, которые касаются в двух различных точках и пересекаются (но не касаются!) еще ровно в одной точке?

6. Обобщите пункты 4 и 5 на случай кривой 2-го порядка и кривой n-го порядка для произвольного n.

Задача 12. Арифметические функции – 2

Определенная на множестве натуральных чисел функция называется *арифметической*. Арифметическая функция f называется *мультипликативной*, если $f(m_1, m_2) = f(m_1) \cdot f(m_2)$ для любых взаимно простых натуральных чисел m_1 и m_2. Через $s_f(n)$ будем обозначать количество различных значений арифметической функции $f(x)$ по модулю n, при этом $s_f(1)=1$.

1.1. Являются ли функции $s_x(n)$, $s_{x+3}(n)$ и $s_{2x+3}(n)$ мультипликативными?

1.2. Пусть $P(x)$ многочлен. Является ли функция $s_P(n)$ мультипликативной?

1.3. Найдите необходимые и/или достаточные условия на функцию f, при которых функция $s_f(n)$ будет мультипликативной. В частности, является ли $s_f(n)$ мультипликативной функцией для любой f ?

1.4. Найдите необходимые и/или достаточные условию на функцию f, при которых $s_f(nm)=s_f(n)\cdot s_f(m)$ для любых натуральных m и n. В частности, дайте ответ на этот вопрос для многочленов.

2.0. Функция $s_{x^2}(n)$ – число квадратичных вычетов по модулю n хорошо известна. Найдите методы её вычисления, а также попробуйте предложить свой метод.

2.1. Пусть $P(x)=ax^2+bx+c,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Вычислите, оцените или предложите алгоритм вычисления $s_P(n)$. Интерес представляют даже частные случаи.

2.2. Вычислите, оцените или предложите алгоритм вычисления $s_{x^m}(n)$, $m\in\mathbb{N}$. В частности, чему равно $s_{x^3}(n)$?

2.3. Вычислите, оцените или предложите алгоритм вычисления $s_{m^x}(n)$, $m\in\mathbb{N}$. В частности, чему равно $s_{2^x}(n)$?

3.1. Решите уравнение $s_{x^3+x}(n)=n$.

3.2. Пусть P многочлен третьей степени с целыми коэффициентами. Решите уравнение $s_P(n)=n$.

3.3. Вычислите, оцените или предложите алгоритм вычисления $s_P(n)$.

Через $s^*_f(n)$ будем обозначать количество различных значений арифметической функции $f(x)$ по модулю n, взаимно простых с n. При этом $s^*_f(1)=1$.

4. Рассмотрите вопросы, аналогичные вопросам 1-3, для функций $s^*_f(n)$ (в третьем пункте рассмотрите уравнения $s^*_{x^3+x}(n)=\varphi(n)$ и $s^*_P(n)=\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера).

5. Предложите свои обобщения и направления в этой задаче и изучите их.

Задача 13. Окрестностные множества в графах

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в задаче, можно найти в книге [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.].

Графом называется упорядоченная пара $G = (V, E)$, где V – некоторое непустое конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – его *рёбрами*. Множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, множество его рёбер – $E(G)$. Число вершин графа называется его *порядком*. Подмножество всех вершин графа G, смежных с вершиной u, называется *окружением* вершины u и обозначается $N(u)$; *замкнутым окружением* вершины u называется множество $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

Пусть задан граф G и в нём выбрано непустое подмножество вершин $U \subseteq V(G)$. Рассмотрим подграф $G' = (U, E')$ графа G, где E' состоит из всех тех рёбер графа G, у которых оба конца принадлежат U. Говорят, что этот подграф *порождён множеством вершин* U и обозначают его через $G(U)$. Положим $G - U = G(V(G) \setminus U)$.

Пусть G – произвольный граф. Множество вершин $D \subseteq V(G)$ называется *доминирующим*, если каждая вершина из $V(G) \setminus D$ смежна с некоторой вершиной из D. Доминирующее множество графа называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Наименьшая из мощностей доминирующих множеств графа G называется *числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. Доминирующее множество D графа G называется *окрестностным*, если для каждого ребра $\{u, v\} \in E(G - D)$ в D найдётся вершина, смежная одновременно с обоими его концами u и v. Окрестностное множество графа называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого окрестностного множества этого графа. Наименьшая из мощностей окрестностных множеств графа G называется *окрестностным числом* графа G и обозначается через $nb(G)$.

Множество вершин $X \subseteq V(G)$ называется *вершинным покрытием* графа G, если каждое ребро из $E(G)$ инцидентно хотя бы одной вершине из X. Наименьшая из мощностей вершинных покрытий графа G называется *числом вершинного покрытия* графа G и обозначается через $\beta(G)$. *Рёберным покрытием* графа G называется такое подмножество рёбер $Y \subseteq E(G)$, что каждая вершина графа G инцидентна по крайней мере одному ребру из Y. Из этого определения следует, что лишь графы с изолированными вершинами (т.е. вершинами степени 0) не имеют рёберных покрытий. Наименьшая из мощностей рёберных покрытий графа G называется *числом рёберного покрытия* графа G и обозначается через $\beta^*(G)$.

Исследуйте следующие задачи.

1) Приведите пример графа, для которого минимальное окрестностное множество не является наименьшим (по мощности). Попробуйте построить бесконечную серию таких графов.

2) Докажите, что для множества $D \subseteq V(G)$ следующие утверждения эквивалентны: (а) D – окрестностное множество графа G; (б) граф G является

объединением подграфов, порождённых замкнутыми окружениями вершин из D, т.е. $G = \bigcup_{u \in D} G(N[u])$.

3) Вычислите $\gamma(G)$, $nb(G)$ и $\beta(G)$ для следующих графов: полный граф K_n, простая цепь P_n, простой цикл C_n, колесо W_n, полный двудольный граф $K_{n,m}$, граф Петерсена. Вычислите $nb(G)$ и $\beta(G)$ для графа n-мерного куба Q_n.

4) Докажите, что для любого графа G порядка p с максимальной степенью вершин $\Delta = \Delta(G)$ выполняются неравенства

$$\left\lceil \frac{p}{1+\Delta} \right\rceil \le nb(G) \le p - \Delta.$$

Приведите примеры графов, для которых указанные неравенства выполняются как равенства. Предложите свои варианты нижних и верхних оценок для параметра $nb(G)$.

5) Докажите, что для любого графа G без изолированных вершин выполняются неравенства $\gamma(G) \le nb(G) \le \beta(G)$. Верно ли, что для любого графа G без изолированных вершин выполняется неравенство $nb(G) \le \beta^*(G)$?

6) Граф G назовём *совершенным окрестностным*, если для каждого его порождённого подграфа H без изолированных вершин выполняется равенство $nb(H) = \beta(H)$. Попробуйте найти необходимое и достаточное условие для графа быть совершенным окрестностным.

7) Докажите, что для любых целых чисел a, b, c, таких, что $2 \le a \le b \le c$, существует граф G, у которого $\gamma(G) = a$, $nb(G) = b$, $\beta(G) = c$. Исследуйте также данный пункт при условии, что граф G является связным.

8) Докажите, что для любых положительных целых чисел r, s и t, таких, что $r \le s \le t - r$, существует граф G порядка t, у которого $nb(G) = r$ и G имеет минимальное окрестностное множество мощности s.

9) Обозначим через $\Omega(G)$ граф пересечений минимальных окрестностных множеств графа G, т.е. вершины графа $\Omega(G)$ биективно соответствуют минимальным окрестностным множествам графа G и две вершины в графе $\Omega(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие минимальные окрестностные множества графа G пересекаются. Определите $\Omega(G)$ для следующих графов: K_n, P_n, C_n, W_n, $K_{n,m}$. В каждом из указанных случаев найдите явную формулу для порядка графа $\Omega(G)$.

10) Пусть p – положительное целое число. Обозначим через $n(p)$ наибольшее значение $nb(G)$ в классе связных графов G порядка $p \ge 1$. Найдите точное значение $n(p)$ для $p = 1, 2, \ldots, 15$. Можно ли утверждать, что для каждого $p \ge 2$ выполняется неравенство $n(p) \le \left\lfloor \frac{9p}{13} \right\rfloor$? Докажите, что найдётся бесконечная последовательность значений p, для которых $13 \cdot n(p) = 9 \cdot p$.

11) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.