

XX республиканский турнир юных математиков
(4-9 декабря 2018 г.)

Письменный (нулевой) тур

6 декабря 2018 года

ВНИМАНИЕ:

- 1) время решения 3 час. = 180 мин.;
- 2) исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);
- 3) на первом листе каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть
 - отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;
 - оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).
- 4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами);

Задача 1. Расставьте числа

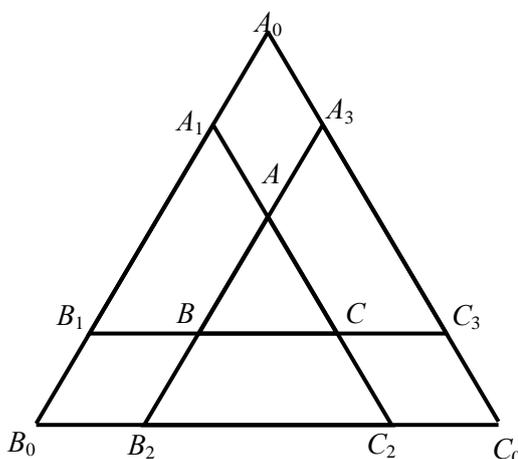
- а) Требуется расставить числа $1, 2, \dots, N$ в каком-то порядке так, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, N$ сумма первых k чисел делилась на k . При каких N это возможно?
- б) Требуется расставить числа $1, 2, \dots, N$ в каком-то порядке так, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, N-1$ сумма первых k чисел делилась на $(k+1)$ -е. При каких N это возможно?
- в) Можно ли расставить все натуральные числа в таком порядке, чтобы при любом $k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots$ сумма первых k чисел делилась на $(k+1)$ -е?
- г) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задание 2. Преобразования фигур, площади, объемы

Определение. Гомотетией с центром O и коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором точка A переходит в точку A' , удовлетворяющую условию $k\overline{OA} = \overline{OA'}$.

1. Подобие и гомотетия

1.1. Площадь треугольника ABC равна S . Треугольник A_1B_1C получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке C и коэффициентом 2 (точки A_1 и B_1 лежат на лучах CA и CB за точками A и B , см рис.). Аналогично, треугольник AB_2C_2 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2 , треугольник A_3BC_3 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке B и коэффициентом 2 . Обозначим точки пересечения пар прямых A_1B_1 и A_3C_3 , A_1B_1 и B_2C_2 , A_3C_3 и B_2C_2 соответственно через A_0 , B_0 и C_0 . Найдите площадь треугольника $A_0B_0C_0$.



- 1.2. Чему будет равна площадь треугольника $A_0B_0C_0$, если коэффициенты гомотетии пункта а) равны не $2, 2, 2$, а p, q, r соответственно?
- 1.3. Попробуйте обобщить результаты этих пунктов на произвольные выпуклые многоугольники.

2. Симметрии

Прямая l проходит через высоту BD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Другой треугольник KLM симметричен треугольнику ABC относительно центра, лежащего на прямой l .

- 2.1. Определите отношение площади пересечения этих треугольников к площади треугольника ABC в зависимости от расположения центра симметрии на прямой l .
- 2.2. Какое наибольшее значение может принимать отношение площади общей части этих треугольников к площади треугольника ABC ?
- 2.3. Попробуйте обобщить результаты этих пунктов на другие виды треугольников
3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача № 3. Экстремальные несобственные делители
(или минимальный и максимальный натуральный делитель)

- 1). Для каждого натурального числа $n > 1$ обозначим через $f(n)$ сумму n и его *наименьшего* натурального делителя, большего 1. Компьютер печатает по очереди числа $f(2), f(3), f(4), \dots$ Сколько раз будет напечатано число 2016?
- 2). Для каждого натурального числа $n > 1$ обозначим через $f(n)$ сумму n и его *наибольшего* натурального делителя, отличного от n . Компьютер печатает по очереди числа $f(2), f(3), f(4), \dots$
 - 2.1) Сколько раз будет напечатано число 2 500?
 - 2.2). Укажите множество из 50 000 чисел, каждое из которых будет напечатано среди первого миллиона чисел как минимум дважды.
 - 2.3) Найдется ли число, которое будет напечатано ровно 4 раза?
- 3) *Обобщение.* Для каких натуральных m найдется число, которое будет напечатано не менее m раз?
- 4) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.