

Письменный (нулевой) тур

7 декабря 2016 года

ВНИМАНИЕ:

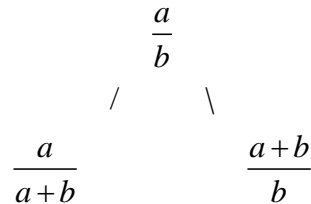
- 1) **время решения 3 час. = 180 мин.;**
- 2) **исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради** и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);
- 3) **на первом листе** каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть
 - отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;
 - оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте **со второго листа тетради**).
- 4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами);

Задача 1. Квадраты, кубы и т.д.

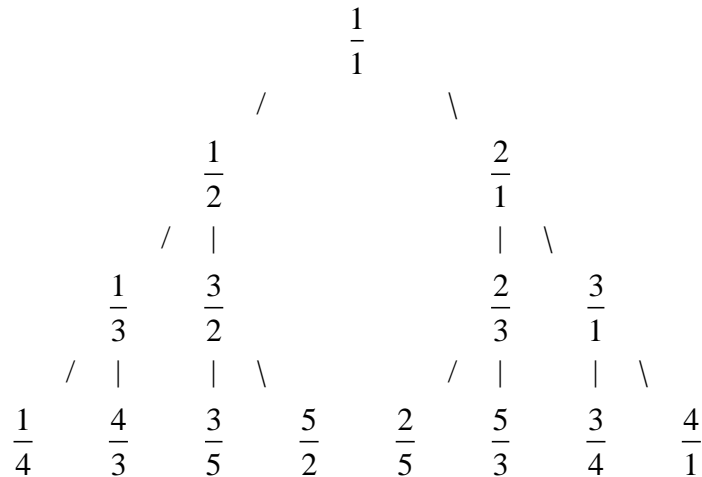
1. Найдите наименьшее двухзначное число, к которому нельзя справа приписать две цифры, так чтобы получился полный квадрат.
2. Дано шестизначное число. Верно ли, что к нему всегда можно справа приписать шесть цифр, так что в результате получится полный квадрат, если
 - а) если первая цифра исходного числа 5?
 - б) если первая цифра исходного числа 1?
 - в) если первая цифра исходного числа 2?
3. Найдите наименьшее шестизначное число, для которого нельзя справа приписать шесть цифр, так что получится полный квадрат.
4. Дано шестизначное число с первой цифрой 3. Какое наименьшее количество цифр требуется приписать к нему справа, чтобы гарантированно получить полный куб, независимо от вида исходного числа.
5. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и исследуйте их.

Задача № 2. Графы и рациональные числа

Корневое дерево T строится следующим образом. На первом уровне имеется одна вершина – корень – с меткой $1/1$. От корня отходят два ребра к двум вершинам второго уровня с метками $1/2$ (левее) и $2/1$ (правее). Причем порядок следования меток важен. И далее, если у нас есть вершина с меткой a/b ($a, b \in \mathbb{N}$) на i -ом уровне ($i \in \mathbb{N}$), то на $(i + 1)$ -ом уровне она соединена ребрами с вершинами с метками $a/(a + b)$ (левее) и $(a + b)/b$ (правее).



Требуемое дерево T имеет бесконечное число уровней, другими словами, какое бы большое число уровней n не взяли, у данного дерева всегда есть $(n+1)$ уровень. Пример первых четырех уровней такого дерева приведен ниже:



В дальнейшем метки вершин будем рассматривать, как рациональные числа.

- 1) Доказать, что любое положительное рациональное число является меткой хотя бы одной вершины построенного дерева.
- 2) Найти все уровни, на которых есть метки, равные числу $2016/2017$.
- 3) Для произвольного рационального числа a/b ($a, b \in \mathbb{N}$) найти или оценить сверху минимальный уровень, на котором оно впервые появляется в качестве метки.
- 4) Доказать, что если на некотором уровне есть метка a/b , то на этом уровне обязательно есть метка b/a .
- 5) Рассмотрим отображение $f(x) = \frac{1}{2[x] - x + 1}$, где $[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ – целая часть действительного числа x . Пусть $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_{2^k}^{(k)}$ – метки k -го уровня, выписанные последовательно слева на право. а) Доказать, что для любого $i < 2^k$ имеет место равенство $f(a_i^{(k)}) = a_{i+1}^{(k)}$. б) Найти $f(a_{2^k}^{(k)})$.
- 6) Предложите свои обобщения или направления исследования и изучите их.

Задача № 3. Фигуры разрезают плоскость и пространство

0. На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие две прямые не параллельны, никакие три прямые не пересекаются в одной точке). На какое количество частей они делят плоскость?
1. На какое наибольшее количество частей могут разделить плоскость:
а) n окружностей; б) n треугольников?
2. На какое наибольшее количество частей делят плоскость n выпуклых m -угольников?
3. Тот же вопрос для необязательно выпуклых m -угольников: а) при четных m ; б) при нечетных m .
4. На какое наибольшее число частей могут разделить пространство:
а) n плоскостей; б) n сфер?
5. Придумайте свои обобщения или направления исследования этой задачи и изучите их.