

Письменный (нулевой) тур

7 декабря 2013 года

ВНИМАНИЕ:

- 1) время решения 3 час. = 180 мин.;
- 2) исследование по каждой задаче необходимо оформить в отдельной тетради и подписать название команды, город, фамилию автора(ов);
- 3) на первом листе каждой тетради сделайте резюме своего исследования соответствующей задачи – то есть
 - отдельно, четко и лаконично сформулируйте основные результаты вашего исследования этой задачи;
 - оформление самого решения (оформление результатов – доказательств, примеров и других элементов исследования – начинайте со второго листа тетради).
- 4) интерес представляет как максимально полное решение авторской постановки, так и ваши собственные идеи, обобщения, направления (утверждения, обоснования, гипотезы; разрешаются импровизации с конкретными результатами);

№ 1. Числа в двоичной системе счисления

На множестве натуральных чисел определим функцию $F(n)$ следующим образом: запишем число n в двоичной системе счисления. Если число единиц в двоичной записи четно, то положим $F(n) = 0$, если нечетно, то $F(n) = 1$.

1. Докажите, что среди первых ста натуральных чисел не менее 32 чисел удовлетворяют условию $F(n) = F(n+1)$.
2. Докажите, что среди первой тысячи натуральных чисел не менее 320 чисел удовлетворяют условию $F(n) = F(n+1)$.
3. Найдите точные значения количеств чисел из пунктов 1 и 2.
4. Докажите, что среди первого миллиона натуральных чисел не менее 450 000 удовлетворяют условию $F(n) = F(n+7)$.
5. Найдите точное значение количества чисел из пункта 4.
6. Рассмотрим первые 10^m натуральных чисел. Найдите количество чисел, удовлетворяющих условию $F(n) = F(n+k)$, или хотя бы оцените их количество.

Примечание. Исследуйте вопросы пункта 6 хотя бы для некоторых значений m и k . Предложите также свои направления или обобщения в этой задаче и изучите их.

№ 2. Треугольники

1. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по 9 точек, разбивающих их на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках, взятых по одной на каждой стороне. Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам исходного треугольника?
2. Та же задача, что и в пункте 1, но на каждой стороне взято по n точек.
3. Та же задача, что и в пункте 1, но на двух сторонах взято по n точек, а на третьей стороне m точек.
4. Та же задача, что и в пункте 1, но на трех сторонах треугольника взято k , m и n точек соответственно.
5. Предложите свои направления или обобщения в этой задаче исследуйте их (возможно, например, и следовать подобные задачи для квадратов или параллелограммов, а также для некоторых видов многогранников в пространстве).

Примечание. В каждом пункте (или в обобщениях) интересно рассмотреть случаи даже небольших значений параметров.

№ 3. Остатки и концовки

1. Найдите все двузначные числа, всякая натуральная степень которых оканчивается двумя цифрами, составляющими первоначальное число.
2. Найдите все трехзначные числа, всякая натуральная степень которых оканчивается тремя цифрами, составляющими первоначальное число.
3. Какие остатки может давать сотая степень целого числа при делении на 125?
4. Докажите, что если целое число N взаимно просто с 10, то 101-я степень числа N оканчивается теми же тремя цифрами, что и N (так, например, 1233^{101} оканчивается цифрами 233, а 37^{101} – цифрами 037).
5. Пусть N – четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20} ? Какова будет цифра сотен числа N^{200} ?
6. Предложите свои обобщения и направления исследования этой задачи и изучите их. Возможно, Вы сможете сформулировать более точные результаты по указанным выше пунктам и доказать их (например, указать цифру десятков или сотен в п. 5 для меньших степеней).