

# RESEARCH PROBLEMS FOR THE NATIONAL SUMMER SCHOOL 2009

DAVID ZMIAIKOU

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Числа на круге	1
2. Линейные комбинации	2
3. Многоугольники Гагеля	2
4. Четверки простых чисел-близнецов	2
5. Динамика точки, движущейся к вершинам многоугольника	3
6. Одновременная делимость	3
7. Вложение одного треугольника в другой	3
8. Наибольшие хорды многоугольников	3
9. Рептилии	4
10. Число поделуев выпуклой фигуры	4
11. Множество кругов без трех в линию	4
12. Разность двух равна одному	4
13. Целые части степеней	4
14. English version of some problems	5

## 1. ЧИСЛА НА КРУГЕ

В данной задаче рассматривается вопрос расстановки натуральных чисел на круге таким образом, чтобы любые несколько подряд идущих чисел обладали определенным свойством.

- a1) Найдите все  $n > 1$ , при которых на круге можно расставить  $n$  натуральных чисел так, чтобы для любых двух подряд идущих чисел отношение наибольшего к наименьшему было простым числом.
- a2) Даны натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $k = a+b$ . Найдите все  $n \geq k$ , при которых на круге можно расставить  $n$  натуральных чисел так, чтобы для любых  $k$  подряд идущих чисел произведение каких-то  $a$  из них равнялось простому числу, умноженному на произведение оставшихся  $b$  чисел.
- b1) Найдите все  $n > 1$ , при которых на круге можно расставить  $n$  натуральных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел одно являлось суммой двух других.
- b2) Даны натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $k = a + b$ . Найдите все  $n \geq k$ , при которых на круге можно расставить  $n$  натуральных чисел так, чтобы для любых  $k$  подряд идущих чисел сумма каких-то  $a$  из них равнялась сумме оставшихся  $b$  чисел.
- c) Сформулируйте и исследуйте другие аналогичные задачи.

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ

Комбинаторная задача об остатках линейных комбинаций элементов конечного множества целых чисел.

- а1) Даны девять различных целых чисел. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  такие, что  $a + b - c - d$  делится на 20.
- а2) Пусть  $N$  натуральное число. Найдите наименьшее натуральное  $m = m(N)$ , удовлетворяющее условию: из любого множества  $m$  целых чисел всегда можно выбрать четыре различных числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  такие, что выражение  $a + b - c - d$  делится на  $N$ .
- а3) Пусть  $N$  и  $k$  натуральные числа. Найдите наименьшее натуральное  $m = m(N, k)$ , удовлетворяющее условию: из любого множества  $m$  целых чисел всегда можно выбрать  $2k$  различных чисел  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_k$  такие, что линейная комбинация  $a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_k$  делится на  $N$ .
- б) *Общая формулировка.* Пусть  $N$ ,  $k$  и  $l$  натуральные числа. Найдите наименьшее натуральное  $m = m(N, k, l)$ , удовлетворяющее условию: из любого множества  $m$  целых чисел всегда можно выбрать  $(k + l)$  различных чисел  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_l$  такие, что линейная комбинация  $a_1 + \dots + a_k - b_1 - \dots - b_l$  делится на  $N$ .
- с) Предложите свои обобщения и направления.

## 3. МНОГОУГОЛЬНИКИ НАГЕЛЯ

Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$ , обозначим через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  точки касания вневписанных окружностей к треугольнику, лежащие на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. С помощью теоремы Чевы несложно показать, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Нагеля*. В данной задаче определяется аналогичное понятие для произвольного многоугольника.

- а1) Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Вневписанные окружности к четырехугольнику касаются сторон  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  и  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Рассмотрим четырехугольник, вершинами которого являются точки пересечения отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Обозначим его через  $N_{ABCD}$  и назовем его *первым четырехугольником Нагеля*. Исследуйте зависимость свойств этого четырехугольника от свойств исходного четырехугольника. Например, найдите площадь  $N_{ABCD}$ , зная площадь  $ABCD$ , и т.п.
- а2) Можно также рассмотреть четырехугольник  $N'_{ABCD}$ , вершинами которого являются точки пересечения отрезков  $AB_1$ ,  $BC_1$ ,  $CD_1$  и  $DA_1$ . Назовем его *вторым четырехугольником Нагеля*. Сравните четырехугольники  $N_{ABCD}$  и  $N'_{ABCD}$ .
- б) Обобщите и исследуйте задачу для выпуклого  $n$ -угольника, где  $n > 4$ .

## 4. ЧЕТВЕРКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ-БЛИЗНЕЦОВ

Два натуральных числа  $p$  и  $q$  называются *числами-близнецами*, если они оба просты и  $q = p + 2$ . Так, пары  $(3, 5)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(11, 13)$ ,  $(17, 19)$  являются парами чисел-близнецов.

- а1) Найдите все натуральные  $n$ , для которых существуют числа-близнецы  $p$  и  $q$  такие, что  $2^n + p$  и  $2^n + q$  также являются числами-близнецами.
- а2) Дано натуральное число  $k$ . Верно ли, что существует только конечное число натуральных  $n$ , для которых найдется пара чисел-близнецов  $(p, q)$  такая, что  $(k^n + p, k^n + q)$  также пара чисел-близнецов?
- б) Найдите все натуральные  $n$ , для которых существуют числа-близнецы  $p$  и  $q$  такие, что  $2 \cdot 5^n + p$  и  $2 \cdot 5^n + q$  также являются числами-близнецами.

- с) *Общая формулировка.* Даны натуральное число  $k$  и многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Верно ли, что существует только конечное число натуральных  $n$ , для которых найдется пара чисел-близнецов  $(p, q)$  такая, что  $(P(k^n)+p, P(k^n)+q)$  также пара чисел-близнецов? Например, в пункте б) рассматриваются значения  $k = 5$  и  $P(x) = 2x$ .

## 5. ДИНАМИКА ТОЧКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ К ВЕРШИНАМ МНОГОУГОЛЬНИКА

Задача по планиметрии, в которой рассматривается несложная динамическая система.

- а1) Точка  $P$  движется прямолинейно к вершине  $A$  треугольника  $ABC$ . На половине пути она сворачивает и движется к вершине  $B$ , на половине пути она сворачивает и движется к вершине  $C$ , на половине этого пути она снова сворачивает к  $A$  и т.д. Доказать, что существует треугольник, на который точка  $P$  стремится попасть. Построить этот треугольник и вычислить его площадь, если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .
- а2) Пусть  $n$  натуральное число. Решите предыдущую задачу для случая, когда точка  $P$  проходит  $1/n$  часть пути к вершине и затем сворачивает к другой вершине.
- б) Та же задача для выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Заметьте, что здесь появляется несколько существенно отличных вариантов обхода вершин:  $A, B, C, D$ , или  $A, C, B, D$ , или  $A, C, D, B$ , ...
- с) Общая задача для выпуклого многоугольника.

## 6. ОДНОВРЕМЕННАЯ ДЕЛИМОСТЬ

В данной задаче речь идет о нахождении критериев, необходимых и достаточных для того, чтобы множества корней двух целочисленных уравнений (по модулю натурального числа) совпадали.

- а1) Докажите, что  $3x + y$  кратно 13 тогда и только тогда, когда  $5x + 6y$  кратно 13, где  $x$  и  $y$  – целые числа.
- а2) Дано натуральное число  $n$ . Описать множество целых чисел  $a, b, c$  и  $d$ , для которых выполняется следующее условие: числа  $ax + by$  и  $cx + dy$  делятся на  $n$  при одних и тех же целых значениях  $x$  и  $y$ .
- а3) Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ . Описать множество целых чисел  $a_1, \dots, a_k$ , и  $b_1, \dots, b_k$ , для которых выполняется следующее условие: числа  $a_1x_1 + \dots + a_kx_k$  и  $b_1x_1 + \dots + b_kx_k$  делятся на  $n$  при одних и тех же целых значениях  $x_1, \dots, x_k$ .
- б) Дано натуральное число  $n$ . Описать множество целых чисел  $a, b, c$  и  $d$ , для которых выполняется следующее условие: числа  $ax^2 + by^2$  и  $cx^2 + dy^2$  делятся на  $n$  при одних и тех же целых значениях  $x$  и  $y$ .
- с) Исследуйте одновременную делимость других целочисленных выражений.

## 7. ВЛОЖЕНИЕ ОДНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА В ДРУГОЙ

Обозначим через  $P$  и  $Q$  треугольники с длинами сторонами  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  соответственно. Какие условия (необходимые и/или достаточные) нужно наложить на  $p_i$  и  $q_i$ , чтобы в треугольнике  $P$  можно было поместить треугольник  $Q$ ?

## 8. НАИБОЛЬШИЕ ХОРДЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим выпуклый  $n$ -угольник  $P$  с длинами сторон  $a_1, \dots, a_n$ . Обозначим через  $b_i$  длину наибольшей хорды  $P$ , параллельной  $i$ -ой стороне.

а) Докажите, что

$$\sqrt{8} < \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \leq 4.$$

Когда выполняется равенство?

б) Верно ли, что

$$3 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} ?$$

с) Попытайтесь найти трехмерные аналоги этих неравенств.

(*Хордой* называется отрезок с концами на сторонах или в вершинах многоугольника.)

## 9. РЕПТИЛИИ

Назовем *n-рептилией* плоскую фигуру, которую можно разрезать на  $n$  одинаковых фигур, подобных исходной.

- Опишите все  $n$ -рептилии, являющиеся выпуклыми многоугольниками.
- Приведите примеры невыпуклых  $n$ -рептилий.
- Приведите примеры рептилий с "дырками".
- Существуют ли 2-рептилии, являющиеся одновременно 3-рептилиями?

## 10. ЧИСЛО ПОЦЕЛУЕВ ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ

*Числом поцелуев* выпуклой фигуры  $P$  на плоскости называется наибольшее число копий фигуры, которые можно разместить вокруг  $P$  без наложений таким образом, чтобы все они касались  $P$ . Найдите числа поцелуев круга, треугольника, четырехугольника, и т.д.

## 11. МНОЖЕСТВО КРУГОВ БЕЗ ТРЕХ В ЛИНИЮ

Какого радиуса должен быть круг, чтобы в него можно было вложить  $n$  единичных кругов так, чтобы никакая прямая не пересекала более двух из них?

## 12. РАЗНОСТЬ ДВУХ РОВНА ОДНОМУ

Решите следующее уравнение

$$x^m - 2y^n = 1$$

в натуральных числах  $x, y, m, n > 1$ .

## 13. ЦЕЛЫЕ ЧАСТИ СТЕПЕНЕЙ

Рассмотрим последовательности вида  $[(\frac{3}{2})^n]$  и  $[(\frac{4}{3})^n]$ , где  $n$  натурально.

- Докажите, что в каждой из этих последовательностей имеется бесконечно много составных чисел.
- Верно ли, что эти последовательности также содержат бесконечно много простых чисел?

## 14. ENGLISH VERSION OF SOME PROBLEMS

**7. Fitting one triangle inside another.** Let triangles  $P$  и  $Q$  have edge lengths  $p_1, p_2, p_3$  and  $q_1, q_2, q_3$  respectively. What are necessary and sufficient conditions on the  $p_i$  and  $q_i$  for  $P$  to contain a congruent copy of  $Q$ ?

**8. Longest chords of polygons.** Let  $P$  be a plane convex  $n$ -gon with side lengths  $a_1, \dots, a_n$ . Let  $b_i$  be the length of the longest chord of  $P$  parallel to the  $i$ th side.

a) Prove that

$$\sqrt{8} < \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \leq 4.$$

When does the equality on the right hold?

b) Is it true that

$$3 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} ?$$

c) What are 3-dimensional analogs of these inequalities?

**9. Reptiles.** An  $n$ -reptile is a two dimensional region that can be tiled by  $n$  congruent tiles, each similar to the whole region.

- Describe all  $n$ -reptiles that are convex polygons.
- Give examples of non-convex  $n$ -reptiles.
- Give examples of reptiles with "holes".
- Does there exist a 2-reptile that is also a 3-reptile?

**10. Kissing numbers of convex sets.** The *kissing number* of a convex set  $P$  in the plane is the greatest number of disjoint congruent copies of  $P$  that can be arranged around  $P$  so that they all touch  $P$ . Find the kissing numbers of a disk, a triangle, a quadrilateral, etc.

**11. Collections of disks with no three in a line.** What is the radius of the smallest disk in which one can place  $n$  unit disks so that no straight line intersects more than two of them?

**12. Difference of two gives one.** Solve the following equation

$$x^m - 2y^n = 1$$

in integers  $x, y, m, n > 1$ .

**13. Integer parts of powers.** Consider the sequences  $[(\frac{3}{2})^n]$  and  $[(\frac{4}{3})^n]$  where  $n$  is a positive integer.

- Prove that there are infinitely many composite numbers in each of these sequences.
- Do the sequences also contain infinitely many primes?