Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

Очный тур, 20 октября 2017 года

8 класс

1. Найдите все натуральные числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании в них последней цифры.

Ответ: $\{12;\ 24;\ 36;\ 48\}$.

Решение: Рассмотрим сначала двузначные числа. По условию $\overline{ab}=12\cdot a \Leftrightarrow 10a+b=12a \Leftrightarrow b-2a,$ где a и b цифры исходного числа, откуда получаем четыре ответа: 12; 24; 36; 48.

Для трех и более значных чисел аналогично получим: $\overline{xb}=12x,$ где через x обозначено двух- или более значное число, полученное после вычеркивания последней цифры, откуда $10x+b=12x$ или $b=2x,$ что невозможно.

2. В полдень из пункта А в пункт Б выехал «Москвич». Одновременно из Б в А по той же дороге выехали «Жигули». Через час «Москвич» находился на полпути от А до «Жигулей». Когда он окажется на полпути от «Жигулей» до Б? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое)

Ответ: в 2 часа.

Решение: Пусть скорость «Москвича» v, а «Жигулей» $-$ u; а расстояние АБ равно l. Тогда в 1 час дня (или через час после старта) машины находятся на расстояниях v и $l-u$ от А, т.е. $2v=l-u.$ Пусть через x часов после старта «Москвич» будет на полпути от Б до «Жигулей». Тогда расстояния от машин до пункта Б будет равны: для «Жигулей» xu, а для «Москвич» $l-xv$, т.е. $xu=2(l-xv),$ откуда получаем два соотношения:

$$\begin{cases} 2v+u=l \\ xu=2l-2xv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v+u=l \\ x(u+2v)=2l \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

3. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. На прямой *AB* по обе стороны от гипотенузы отметили такие точки *K* и *M*, что *AK* = *AC* и *BM* = *BC*. Найдите угол *KCM*.

Ответ: 135º.

Решение: Пусть $\angle CAB=\alpha,\ \angle CBA=\beta,\ \alpha+\beta=90^\circ$ (см.рис.1). Угол *CAB* – внешний для равнобедренного треугольника *KAC*, поэтому $\angle CKA=\dfrac{\alpha}{2}.$ Аналогично $\angle CMB=\dfrac{\beta}{2}.$ Тогда $\angle KCM=180^\circ-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}=180^\circ-45^\circ=135^\circ.$

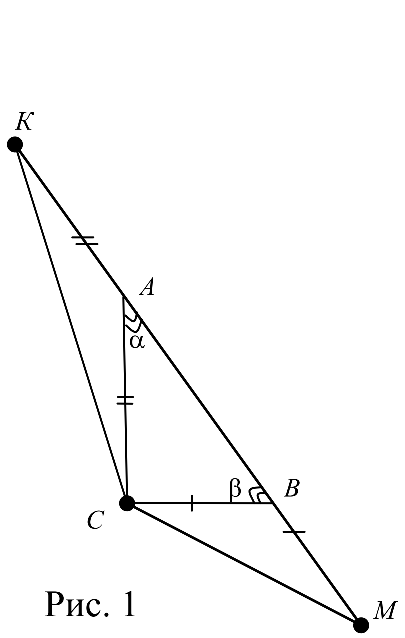

Рис. 1

4. Два игрока по очереди ставят точки в клетки таблицы 7×7. За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек (ставить точки на границы клеток нельзя). Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или столбца суммарно будут стоять 5 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

Ответ: второй игрок.

Первое решение: Выигрывает второй игрок. Для победы ему достаточно на каждом ходу ставить точку в ту же клетку, в которую походил своим предыдущим ходом первый игрок. Таким образом, после всякого хода второго игрока количество точек в любой строке и любом столбце кратно 2 и, следовательно, второй игрок не может проиграть.

Примечание. Как видим, первое решение основано на инварианте четности.

Второе решение: Для победы второго игрока подходит и центрально-симметричная стратегия: ход, симметричный ходу первого игрока относительно центральной клетки таблицы. Действительно, если первый игрок поставил точку не в среднюю строчку и столбец, то в этих строчке и столбце было меньше, чем 5 точек. Тогда и в строчке, и столбце симметричным им относительно центральной клетки, тоже меньше 5 точек (помним, что после любого хода второго игрока расположение точек будет центрально симметричным), т.е. ход второго игрока не будет проигрышным. Если же первый игрок поставил точку в клетку, находящуюся в средней строке и (или) столбце, то после хода второго игрока в этой строке и (или) столбце будет четное число точек, т.е. второй игрок опять не проигрывает.

Третье решение: Будем ставить после каждого хода любого из игроков около (или справа от) каждой строчки синим цветом число, равное числу точек в этой строчке, а около или снизу от каждого столбца – красным цветом – число точек в этом столбце. На каждом ходу второму игроку достаточно ставить точку в такую клетку, что синее и красное число в соответствующей строчке и столбце меньше 4. Такие строчка и столбец при ходе второго игрока всегда будут существовать, так как суммарное количество точек перед его ходом всегда нечетное, а каждое синее и красное число не превосходит 4 (т.е. все они не могут равняться 4).

5. Внутри выпуклого тысячеугольника выбрано 2017 точек так, что никакие три не лежат на одной прямой. Тысячеугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются вершины тысячеугольника и 2017 данных точек. Сколько получилось треугольников?

Ответ: 5032 треугольника.

Решение: Для определения количества треугольников воспользуемся суммами углов. Если получится x треугольников, то общая сумма углов треугольников будет равна $x \cdot 180°$. Эта сумма складывается из суммы углов 1000-угольника, т.е. $998 \cdot 180°$, и суммы углов треугольников «сходящихся» около каждой из 2017 выбранных точек – это еще $2017 \cdot 360°$. Итак, $x \cdot 180° = 998 \cdot 180° + 2017 \cdot 360°$, откуда получается $x = 998 + 4034 = 5032$ треугольника.

6. Найдите сумму дробей $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\ddots+\dfrac{1}{2017}}}}}+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\ddots+\dfrac{1}{2017}}}}}$.

Ответ: 1.

Решение: В каждой из дробей обозначим через x ту часть, которая записывается так: $x=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dots+\dfrac{1}{2017}}}}$,

тогда получим: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}+\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1+x}{2+x}+\dfrac{1}{2+x}=1.$

Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

Очный тур, 20 октября 2017 года

9 класс

1. Сможете ли Вы приписать к числу 20162016 справа а) три цифры, б) две цифры так, чтобы полученное число одновременно делилось на 20 и на 17? Ответ поясните (в частности, если ваш ответ – да, то укажите все возможные варианты, если нет – докажите это).

Ответ: а) $\{32;\ 66\}$, б) нет.

Решение: Деление на 20 и 17 одновременно равносильно делению на 340. При этом полученное число должно оканчиваться на 0. Поэтому проще будет в пунктах а) и б) приписывать две и одну цифру соответственно и рассматривать деление на 34.

а) Имеем: $2016201600 = 59300047 \cdot 34 + 2$ (чтобы получить это, можно число, 2016201600 поделить на 34 с остатком). Тогда, чтобы некоторое число делилось на 34, к этому равенству достаточно прибавить 32 или 66. Других случаев нет.

б) Аналогично имеем: $2016201600 = 59300047 \cdot 34 + 24$, откуда видно, что какую бы цифру к числу 20162016 не приписали, делимости на 34 не будет.

2. Найдите значение выражения $\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \left[\sqrt[3]{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt[3]{2017}\right]$, где $[\,a\,]$ означает целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ответ: 18132.

Решение: Очевидно, что если $n^3 \le x < (u+1)^3$, то $\left[\sqrt[3]{x}\right] = n.$ Таким образом, в сумме $\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt[3]{2017}\right]$ первые 7 слагаемых равны 1, следующие слагаемые с $\left[\sqrt[3]{8}\right]$ по $\left[\sqrt[3]{26}\right]$ (их 19) равны, следующие слагаемые с $\left[\sqrt[3]{27}\right]$ по $\left[\sqrt[3]{63}\right]$ (их 37) равны 3 и так далее, наконец, последние слагаемые с $\left[\sqrt[3]{1728}\right]$ по $\left[\sqrt[3]{2017}\right]$ равны 12. Таким образом, искомая сумма равна

$$7 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 37 \cdot 3 + 61 \cdot 4 + 91 \cdot 5 + 127 \cdot 6 + 169 \cdot 7 +$$
$$+ 217 \cdot 8 + 271 \cdot 9 + 331 \cdot 10 + 397 \cdot 11 + 290 \cdot 12 = 18132.$$

3. Два игрока по очереди ставят точки в клетки таблицы 2017 × 2017. За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек (ставить точки на границы клеток нельзя). Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или столбца суммарно будут стоять 2017 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

Ответ: нет.

Решение: См. решение задачи № 4 для 8 класса.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке BC выбрана точка D, а на продолжении отрезка AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Докажите, что $2DE = D_1E_1$.

Решение: Треугольники ADC и AEC равнобедренные с общим основанием AC, поэтому D и E лежат на серединном перпендикуляре к AC параллельно BH; обозначим его EM (рис.2).

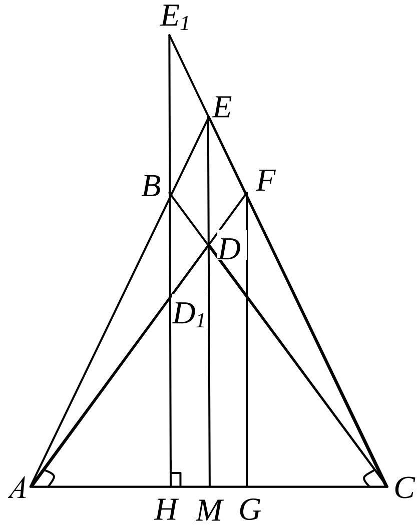

Рис.2

Продлим AD до пересечения с CE в точке F, и опустим из точки F перпендикуляр на AC − отрезок FG. Так как треугольники ABC и AFC равны (AC − общий отрезок и есть две пары равных углов, которые отмечены на рис.2 одной и двумя дугами соответственно). Отсюда $AH = CG$, а значит, M − середина HG, D − середина D_1F, E − середина E_1F (по теореме Фалеса), а следовательно, ED средняя линия треугольника D_1E_1F и $ED = \frac{1}{2}E_1D_1$.

5. Существуют ли нечетные числа x, y, z такие, что значения выражений $xy + 1$, $yz + 1$, $xz + 1$ – полные квадраты?

Решение: Задача про три числа $xy+1,\ xz+1,\ yz+1.$ Поскольку числа $x,\ y$ и z нечетные, они могут при делении на 4 давать только остатки 1 или 3. Следовательно, два из них (допустим, x и y) дают при делении 4 одинаковые нечетные остатки. Тогда произведение xy при делении на 4 дает остаток 1, а число $xy+1$ − остаток 2. Число, дающее остаток 2 при делении на 4, кратно 2 и не кратно 4 и, следовательно, не может быть квадратом натурального числа.

6. На плоскости проведено n прямых так, что каждая прямая пересекается ровно с 2017 из них. Найдите все возможные значения n.

Ответ: 2018 или 4034.

Решение: Пусть n прямых разбиваются на k групп параллельных между собой прямых по $l_1, l_2, ..., l_k$ прямых в этих группах соответственно. В каждой группе прямые не пересекаются, откуда получаем, что $2017 = n - l_1 = n - l_2 = n - l_3 = ... = n - l_k$, а значит: $l_1 = l_2 = ... = l_k$ т.е. в каждой группе одинаковое число прямых, которое обозначим теперь через l. Далее имеем: каждая прямая пересечет $(k-1)l$ прямых, следовательно, $2017 = (k-1)l$, отсюда две возможности:

$$\begin{cases} k-1=1 \\ l=2017 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ l=2017 \end{cases}, \text{ т.е. } n=4034 \text{ прямых}$$

или

$$\begin{cases} k-1=2017 \\ l=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2018 \\ l=1 \end{cases}$$, т.е. $n=2018$ прямых,

пересекающихся в одной точке.