

## ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

---

баллы задачи

- 4 1. Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравнились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара?
- 4 2. Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?
- 6 3. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов изменится курс за июль, на сколько — за август, и на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на  $x$  процентов, курс падал на  $x$  процентов, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?
- 1 4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более
  - 3 а) 99 попыток;
  - 3 б) 75 попыток;
  - 4 в) 74 попыток.
- 9 5. Цифры натурального числа  $n > 1$  записали в обратном порядке и результат умножили на  $n$ . Могло ли получиться число, записываемое только единицами?
- 9 6. Вписанная окружность касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $N$ ,  $K$  и  $M$  соответственно. Прямые  $MN$  и  $MK$  пересекают биссектрису внешнего угла  $B$  в точках  $R$  и  $S$  соответственно. Докажите, что прямые  $RK$  и  $SN$  пересекаются на вписанной окружности треугольника  $ABC$ .
- 5 7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседних по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесенном доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры
  - 5 а)  $20 \times 20$  клеток;
  - 5 б)  $50 \times 90$  клеток?

## ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами  $1, 2, \dots, 100$ , ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более  
1 а) 99 попыток;  
2 б) 75 попыток;  
3 в) 74 попыток.
2. Дан правильный шестиугольник с центром  $O$ . Провели шесть равных окружностей с центрами в вершинах шестиугольника такие, что точка  $O$  находится внутри окружностей. Угол величины  $\alpha$  с вершиной  $O$  отсекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна  $6\alpha$ .  
5
3. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов изменится курс за октябрь, на сколько — за ноябрь, ..., на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на  $x$  процентов, курс падал на  $x$  процентов, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?  
6
4. Покажите, что для любой последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ , состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие  $n$  и  $k$ , что  
8 
$$|a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{n+k}| = 2017.$$
5. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 куска, затем один из трёх кусков опять режем на 2 куска, и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа  $R$ .  
3 а) Докажите, что при  $R = 0,5$  можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезов можно будет отрезать ещё один кусок).  
4 б) Докажите, что если  $R > 0,5$ , то процесс резки когда-нибудь остановится.  
4 в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если  $R = 0,6$ ?
6. Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $I$  — центр вневписанной окружности, касающейся стороны  $AB$ , а  $A_1$  и  $B_1$  — точки её касания с продолжениями сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Пусть  $M$  — середина отрезка  $IC$ , а отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $N$ . Докажите, что точки  $N, B_1, A$  и  $M$  лежат на одной окружности.  
10
7. Город имеет вид квадрата  $n \times n$ , разбитого на кварталы  $1 \times 1$ . Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идёт из юго-западного угла в северо-восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за  $n$  дней он пройдёт все улицы целиком.  
10