

38-й Международный математический Турнир городов
2016/17 учебный год
Решения задач

Осенний тур

Сложный вариант
Младшие классы

1. [5] Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин? (*Н. Чернятьев*)

Ответ. После 45 действий. **Решение.** *Оценка.* Рассмотрим разность числа макарон у двух детей, скажем, из числа Пети вычитается число Васи. Действие Пети уменьшит эту разность на 10, Васи – увеличит на 10, а действия других детей не меняют её. Поэтому эта разность будет ненулевой тогда и только тогда, когда Петя и Вася сделали разное количество действий. Следовательно, чтобы у всех детей оказалось разное количество макарон, необходимо сделать хотя бы $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ действий.

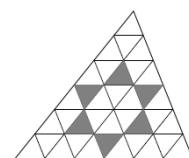
Пример. Первый делает одно действие, затем второй – 2, третий – 3 и т. д. до девятого включительно. Каждый отдал не более $9 \cdot 9 = 81$ макаронины, его исходных 100 макаронин на это хватило.

2. [5] В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32?

(*Н. Чернятьев*)

Ответ. Может. **Решение.** Запишем в чёрных клетках единицы, а в белых клетках – все числа от 1 до 32. При любом разбиении на доминошки в каждой будет ровно одна белая и одна чёрная клетка. Поэтому суммы в доминошках будут 2, 3, ..., 33.

Замечание. Существует пример, когда наибольшее число равно 21, а также известно, что оно не может быть меньше 20.



3. [6] Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности.

(*Е. Бакаев*)

Решение 1. Пусть H – ортоцентр одного из закрашенных треугольников. Присоединив к нему три соседних белых треугольника, получим *двойной треугольник*. Понятно, что H является в этом двойном треугольнике центром описанной окружности. Прделав такие действия для всех закрашенных треугольников, получим шесть равных двойных треугольников с общей вершиной T . Поэтому ортоцентры всех закрашенных треугольников лежат на окружности с центром T радиуса TH .

Решение 2. Рассмотрим два закрашенных треугольника с общей вершиной A . Они симметричны относительно A . Их высоты, выходящие из A , перпендикулярны TA , где T – центр большого треугольника. Значит, их ортоцентры симметричны относительно TA . Поэтому расстояние от T до этих ортоцентров одно и то же. Поскольку это верно для любой пары соседних закрашенных треугольников, то ортоцентры всех этих треугольников равноудалены от T .

4. [8] Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета – либо чёрная, либо белая. За один присест Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке? (А. Кузнецов)

Ответ. 32 конфеты. **Решение.** *Оценка.* При раскладке, указанной на левом рисунке, ни одну из 16 чёрных конфет съесть нельзя, а из 33 белых можно съесть не больше 32 конфет в силу чётности.



Алгоритм. Покажем, что 32 конфеты можно съесть при любой раскладке. В трёхклеточном уголке всегда можно съесть пару конфет. Значит, в прямоугольнике 2×3 можно съесть 4 конфеты. В квадрате 7×7 можно разместить 8 таких прямоугольников (рис. справа).

5. [8] На трёх красных и трёх синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трёх чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же трёх чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа? (Б. Френкин)

Ответ. Всегда. **Решение.** Все искомые числа различны, иначе на карточках некоторые числа были бы равны. Так как их попарные произведения положительны, то все числа одного знака, а так как их попарные суммы положительны, то этот знак плюс. Обозначим искомые числа $x < y < z$. Для карточек каждого цвета рассмотрим отношение наибольшего числа к наименьшему. В одном случае это $\frac{y+z}{x+y}$, в другом $\frac{z}{x}$. Так как $x < z$ и $y > 0$, то

первое отношение меньше второго. Отсюда понятно, на каких карточках написаны суммы и на каких произведения.

Знание попарных сумм трёх чисел определяет эти числа, например, $x = \frac{1}{2}((x+y) + (x+z) - (y+z))$.

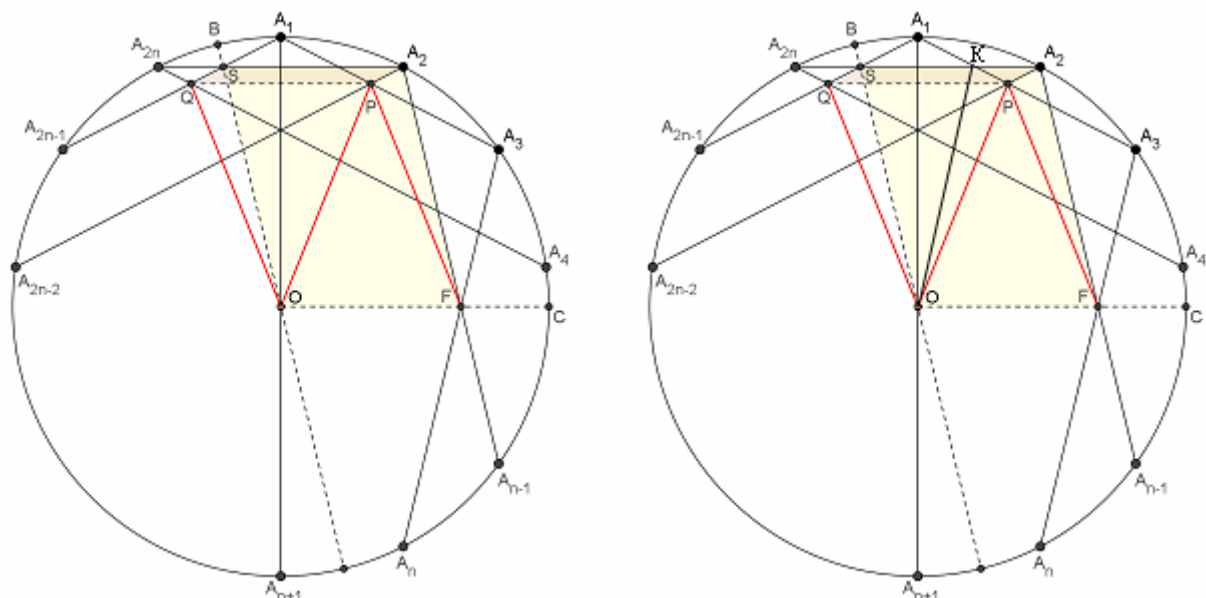
6. [9] Дан правильный $2n$ -угольник $A_1A_2\dots A_{2n}$ с центром O , причём $n \geq 5$. Диагонали A_2A_{n-1} и A_3A_n пересекаются в точке F , а A_1A_3 и A_2A_{2n-2} – в точке P . Докажите, что $PF = PO$. (М. Тимохин)

Решение. Пусть C – середина дуги A_3A_{n-1} . Прямые A_2A_{2n} и OC параллельны как перпендикуляры к диаметру A_1A_{n+1} . Диагонали A_3A_n и $A_{n-1}A_2$ симметричны относительно прямой OC , поэтому F лежит на ней. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть B – середина дуги A_1A_{2n} . Диагонали A_1A_{2n-1} и $A_{2n}A_2$ симметричны относительно прямой OB , поэтому пересекаются на ней в точке S . Прямые OB и A_2A_{n-1} параллельны ввиду равенства дуг, заключённых между ними. Следовательно, $FOSA_2$ – параллелограмм (рис. слева).

При симметрии относительно диаметра A_1A_{n+1} точка P переходит в точку Q пересечения диагоналей A_1A_{2n-1} и $A_{2n}A_4$. Прямые A_1A_{2n-1} и A_2A_{2n-2} , очевидно, параллельны. Прямые PQ и A_2A_{2n} параллельны как перпендикуляры к диаметру A_1A_{n+1} . Следовательно, $PQSA_2$ – параллелограмм.

Значит, отрезок PQ параллелен и равен отрезку A_2S , а он, в свою очередь, отрезку FO . То есть $PQOF$ – тоже параллелограмм. Поэтому $PF = QO = PO$.



Второй способ. Пусть A_2A_{2n} и A_1A_3 пересекаются в точке K . Заметим, что углы A_3KA_2 , A_3FA_2 , A_3OA_2 измеряется дугой A_3A_2 описанной окружности многоугольника. Значит, точки K, A_2, A_3, O и F лежат на одной окружности. Следовательно, трапеция OFA_2K – равнобокая.

Угол $A_{2n-2}A_2A_{2n}$ также измеряется дугой A_3A_2 . Поэтому треугольник A_2PK – равнобедренный, то есть P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_2K , который является осью симметрии указанной трапеции. Следовательно, $PF = PO$.

7. а) [5] Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

б) [6] Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.

(И. Митрофанов, А. Канель-Белов)

Ответ. а) Не обязательно. б) Обязательно.

Решение. а) Можно считать, что варианты ответов – «Да» и «Нет».

Пример 1. Пусть в опросниках встречались все комбинации по 9 «Да» и комбинация из 20 «Да». Возьмём любые 10 вопросов и произвольную комбинацию ответов на них. Если среди них все 10 «Да», то так ответил последний человек, иначе подберём ответы на остальные вопросы так, чтобы оказалось ровно 9 «Да». Таким образом, условие выполнено. Если бы у двух из этих человек отличались ответы на все вопросы, то сумма количеств «Да» у них равнялась бы 20, что невозможно.

Пример 2. Пусть в опросниках встречались все комбинации, где число ответов «Да» кратно 3. Ясно, что произвольную комбинацию из ответов на 10 вопросов можно дополнить до такой. Двух противоположных наборов ответов не встретится, поскольку 20 не кратно 3.

б) Пронумеруем ответы на каждый вопрос числами от 1 до 12, тогда ответ человека — это строка из 20 чисел. Выберем среди отвечающих 11 человек так, чтобы ответ первого начинался на 10 единиц, второго – на 10 двоек и т. д. Составим теперь строку N , которая на последних 10 местах отличается в каждом месте от любой из данных 11 строк. Рассмотрим какое-нибудь место, например, 17-е. В этих 11 строках числа на этом месте есть не более 11 различных чисел, поэтому какое-то из чисел от 1 до 12 там не встречается. Именно его и поставим на это место в строку N . По условию, есть человек $Ч$, чьи ответы полностью совпали с заполненной частью строки N . Рассмотрим его ответы в

первой половине. На 10 местах встречаются не более 10 различных чисел, поэтому какое-то из чисел k от 1 до 11 там не встречается. Но тогда ответы Ч ни в каком месте не совпали с ответами k -го из выбранных.

Замечание. В а) ответ не изменится, даже если заменить 10 на 18; а если на 19, то изменится.

Старшие классы

1. [5] 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

(Жюри по мотивам задачи Н. Чернятьева)

Ответ. После 50 действий. **Решение.** Занумеруем детей от 1 до 100. Пусть k -й ребёнок, где $1 \leq k \leq 50$, переложит по макаронине ребятам с номерами от 51 до $50 + k$. После всех действий у детей окажется 99, 98, ..., 50, 150, 149, ..., 101 макаронин соответственно.

Пусть было сделано меньше 50 действий. Тогда число детей, не отдававших макароны, не меньше 51. Но количество макарон у каждого из них заключено в диапазоне от 100 до 149. Поэтому найдутся двое из них с одинаковым количеством макарон.

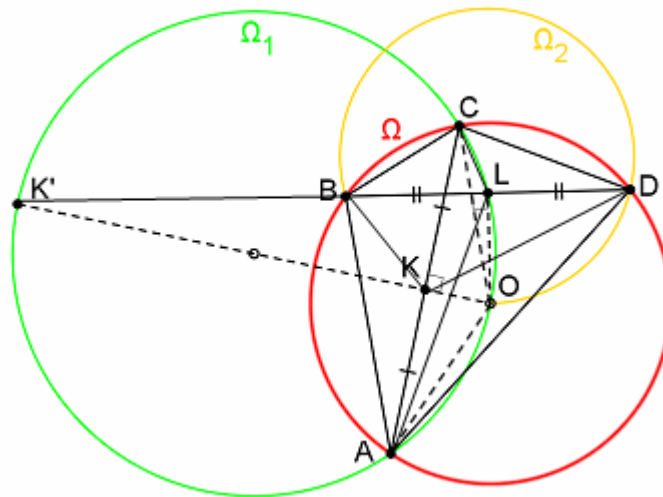
2. [5] См. задачу 2 младших классов.

3. [7] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O , причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность Ω_1 треугольника AOC проходит через середину диагонали BD . Докажите, что описанная окружность Ω_2 треугольника BOD проходит через середину диагонали AC . (*А. Заславский*)

Решение. Пусть K и L – середины AC и BD соответственно. Отрезки OK и OL перпендикулярны соответственно хордам AC и BD окружности Ω . Пусть K' – точка, диаметрально противоположную точке O на Ω_1 точку K' . Поскольку L лежит на Ω_1 , то угол OLK' прямой. Значит, прямая BD проходит через K' . Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Можно считать, что $\angle D \leq 90^\circ$ и $\angle A \leq 90^\circ$. Углы ALB и BLC равны как опирающиеся на равные дуги AK' и CK' окружности Ω_1 . Поэтому $\angle BLC = \frac{1}{2} \angle ALC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ADC$. Значит, треугольники ACD и BCL подобны по двум углам. Отсюда $AC : AD = BC : BL$, то есть $BC \cdot AD = BL \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot AC$. По *теореме Птолемея* $AB \cdot CD = BC \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot AC = KC \cdot BD$.

Из равенства $AB \cdot CD = KC \cdot BD$ следует подобие треугольников ABD и KCD (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle CKD = \angle BAD$. Аналогично из равенства $BC \cdot AD = KC \cdot BD$ получаем, что равны углы CKD и BAD . Поэтому $\angle BKD = 2\angle BAD = \angle BOD$, то есть точка K лежит на окружности Ω_1 .



Второй способ. При инверсии относительно Ω прямая AC переходит в окружность Ω_1 , а точка K – в точку K' . Следовательно, точка K лежит на инверсном образе прямой BD , то есть на Ω_2 .

Примечание. Вписанный четырехугольник с равными произведениями противоположных сторон называется *гармоническим*.

4. [8] На 2016 красных и 2016 синих карточках написаны положительные числа, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то 64 чисел, а на карточках другого цвета – попарные произведения тех же 64 чисел. Всегда ли можно определить, на карточках какого цвета написаны попарные суммы? (Б. Френкин)

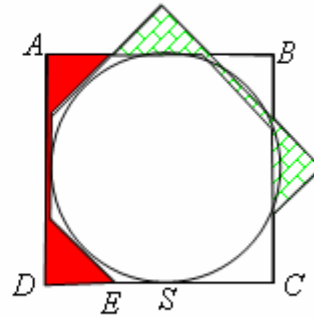
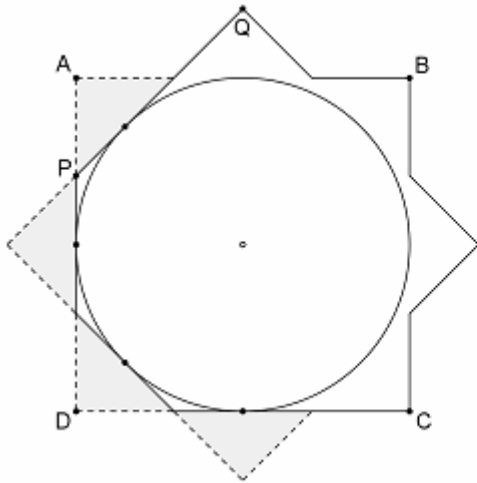
Ответ. Всегда. **Решение 1.** См. задачу 5 младших классов. Если здесь $x_1 < x_2 < \dots < x_{64}$, то $\frac{x_{63}x_{64}}{x_1x_2} > \frac{x_{63} + x_{64}}{x_1 + x_2}$. Действительно, $x_1x_{63}x_{64} + x_2x_{63}x_{64} > x_1x_2x_{63} + x_1x_2x_{64}$.

Решение 2. Понятно, что 64 неизвестных числа положительны и различны. Если максимум одно из них меньше (не меньше) 2, то попарных сумм и произведений, меньших (не меньших) 4, максимум по 63. Следовательно, определяется, имеются ли два неизвестных числа, меньших 2, или два числа, не меньших 2.

В первом случае для наименьших чисел x и y выполняется неравенство $(x - 1)(y - 1) < 1$, то есть $xy < x + y$. Поэтому наименьшее число на карточках будет произведением. Во втором случае, взяв два наибольших числа x и y , аналогично докажем, что $xy > x + y$, и наибольшее число на карточках будет произведением.

5. [9] Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1? (А. Шаповалов)

Ответ. Можно. **Решение.** Рассмотрим круг диаметра 1 и объединение двух описанных вокруг него квадратов, отличающихся поворотом на 45° . Получится восьмиконечная звезда. Откинем от неё четыре тёмных треугольника (см. рис. слева). Круг лежит в оставшейся белой фигуре и касается её границы только в четырёх точках. Немного сдвинем круг вправо. Сдвинутый круг останется в фигуре и будет касаться только её стороны SE в точке S . Это останется верным и после небольшого увеличения сдвинутого круга гомотетией с центром в S .



Поскольку увеличенный круг не касается AD , то два красных треугольника можно соединить перешейком вне круга (см. рис. справа). Отрезем от квадрата $ABCD$ полученную красную фигуру. Она покроет пару треугольников, в которых лежат непокрытые остатком квадрата части увеличенного круга (рис. справа).

6. [9] Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число a по своему выбору, которое он ещё не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение $P(x) = a$. Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть? (А. Мудгал)

Ответ. 4 рубля. **Решение.** Трёх рублей не хватит, поскольку, называя произвольные различные числа a, b и c , Вася мог получить соответственно ответы 0, 1, 2, если у Пети оказался многочлен $P(x) = (c - b)x^{2n} + b$. Ответ 0 возможен, так как число $r = \frac{a - b}{c - b}$ отлично от 0 и 1, поэтому при некотором n уравнение $x^{2n} = r$ не имеет решений в целых числах.

Лемма. Если многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами имеет больше двух различных целых корней, то многочлены $Q(x) \pm 1$ не имеют целых корней.

Доказательство. $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)R(x)$, где $R(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что при каком-то целом x это выражение равно ± 1 . Тогда каждая из скобок равна ± 1 . Значит, какие-то две скобки равны, то есть равны какие-то два из корней a, b и c . Противоречие.

Покажем, как выиграть, имея 4 рубля.

Первый способ. Будем говорить, что ответы, кроме 0, 1 и 2, – *большие*. Вася назовёт числа 5 и 8. Если на одно из них, например на 8, окажется большой ответ, то Вася назовёт 7 и 9. Согласно лемме, ответами будут нули.

Если оба ответа будут маленькие, Вася назовёт 6 и 7. Если на одно из этих чисел будет большой ответ, то вокруг него ответы нулевые. В противном случае, будет четыре ответа трёх видов, что гарантирует совпадение.

7. [12] На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причём они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же. (Ф. Петров)

Решение. Назовём *шаблоном* последовательность из n слов, каждое из которых «Налево» или «Направо», где k -е слово указывает, в каком направлении на k -м ходу могут прыгать лягушки. Докажем большее: количество способов из данной позиции сделать n ходов так, чтобы лягушки не запрыгивали друг на друга, не зависит от шаблона. Заметим, что это количество равно количеству финальных позиций (с учётом кратностей).

Лемма 1. Изменение последнего направления шаблона не меняет количество финальных позиций.

Доказательство. Рассмотрим произвольную позицию перед последним ходом. Каждая позиция разбивается на группы подряд сидящих лягушек. Количество финальных позиций, из неё получаемых, равно количеству групп, поскольку из каждой группы только одна лягушка может прыгнуть влево и одна – вправо. Поэтому общее количество финальных позиций не изменится.

Лемма 2. Замена двух соседних противоположных направлений шаблона не меняет набор финальных позиций.

Доказательство. Пусть два шаблона отличаются только в ходах k и $k + 1$. Рассмотрим произвольную позицию перед k -м ходом. Каждому способу по одному шаблону сделать из неё два прыжка разными лягушками соответствует способ для второго шаблона: те же лягушки прыгают в другом порядке. Поскольку они прыгают в разных направлениях, то это тоже допустимые прыжки. В обоих вариантах получается одна и та же позиция.

Каждому же способу по одному шаблону сделать два прыжка одной лягушкой («туда и обратно») соответствует способ сделать два прыжка по второму шаблону лягушкой, находящейся на другом краю той же группы лягушек. Оба варианта не меняют позицию.

Следовательно, для этих двух шаблонов наборы позиций после $k + 1$ ходов одни и те же, а дальше эти шаблоны совпадают.

Осталось заметить, что с помощью операций, указанных в леммах, можно от любого шаблона перейти к любому другому: операциями из леммы 2 можно как угодно переставлять направления, а операциями из леммы 1 как угодно менять число направлений вправо.