Задания на IV Минский городской открытый турнир юных математиков – 2017

младшая лига, 5-7 классы, *9-11 марта 2017 г.*

- Предварительные заявки с указанием учреждения(й) образования, руководителя, его телефона и электронного адреса необходимо представить **до 13 февраля 2017г.**
- Официальные заявки и предварительные исследования (материалы) необходимо представить **до 22 февраля 2017г.**
- В предварительных материалах должны быть представлены ваши исследования (решения) **не менее 6 заданий.**
- Адрес оргкомитета: 220030, г.Минск, пр.Независисмости, 4, БГУ, ФПМИ, каб. 515, тел. 8-017-209-50-70
E-mail: uni-centre@bsu.by; zadvorny@bsu.by
- **подробнее** см. сайт www.uni.bsu.by (на странице «Минский городской открытый турнир юных математиков – младшая лига»)

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер, поэтому наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**:
  - в распечатанном (шрифт –Times New Roman, размер 14 пт) или аккуратно записанном от руки виде;
  - при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения(й) образования, город, автор(ы) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты Вы решили, какие сделали обобщения,
  - при этом четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - на последней странице приведите список литературы и Интернет-источников, которые Вы использовали при проведении исследования (*строго обязательно*!)

№ 1. Белорусские копеечки

Первого июля 2016 года в Беларуси появились монеты. Семиклассник Саша собирал монетки достоинством 1, 2, 5 и 10 копеек и насобирал по 50 монеток каждого из достоинств. После Нового года он решил составить выражение, значение которого равно 2017, используя в качестве чисел какое-то количество этих монеток (не обязательно все), а также (бесплатные) скобки и знаки четырех арифметических действий между монетками. Нельзя использовать степень и нельзя получать многозначные числа из нескольких рядом лежащих монет, другими словами, между любыми двумя монетами должен стоять либо знак арифметического действия, либо скобка. Общую сумму достоинств использованных монеток будем называть стоимостью выражения. Например, число 71 можно получить как $10 \times 2 + 5 \times 10 + 1$ = 10 (коп.) × 2 (коп.) + 5 (коп.) × 10 (коп.) + 1 (коп.). Стоимость этого выражения равна 28 копеек.

1. Можно ли получить число 2017 выражениями со стоимостями:
   - 1.1. 42 копейки?
   - 1.2. 41 копейка?
   - 1.3. 37 копеек?
   - 1.4. 32 копейки?
   - 1.5. 28 копеек?
   - 1.6. 26 копеек?
   - 1.7. 24 копейки?
2. Докажите, что 2017 нельзя получить выражением стоимостью меньше 21 копейки.
3. Какова минимальная стоимость выражения с числовым значением 2017? Докажите, что нельзя получить 2017 выражением меньшей стоимости.
4. Пусть у Саши изначально было ровно n монеток каждого достоинства. Попробуйте найти все n, при которых можно получить выражение со значением 2017, а также минимальную стоимость этого выражения в зависимости от n.
5. Найдите все года в двадцатом веке, которые можно получить, используя выражения стоимостью 21 копейка. Найдите минимальные стоимости выражений с числовыми значениями 2009 и 1911.
6. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 2. Солнечный зайчик в двух зеркалах

1. Два зеркала образуют между собой угол $ABC = 60^\circ$. Луч света PP_1 образует со стороной BA угол 45°. Отразившись три раза от сторон, луч P_3P_4 покидает систему зеркал, образуя со стороной AB угол β. Найдите угол β. (Луч отражается от сторон угла по закону «угол отражения равен углу падения», см. рис. 1.)

Здесь и далее будем говорить, что луч покидает систему зеркал, если, начиная с какого-то момента, он перестает соударяться со сторонами угла.

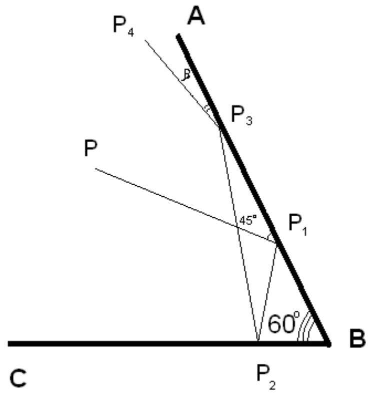


Рис. 1

2. Пусть два зеркала образуют между собой угол ABC = φ . Луч света PP_1 образует со стороной BA угол α, где $0 \le \alpha \le \varphi$, см. рис. 2.

Обозначим через P_n точку, в которой луч в n-ый раз отразится от одного из зеркал. Если после n-ого отражения луч покидает систему зеркал, то обозначим этот луч P_nP'. Верно ли, что луч всегда покидает систему зеркал?

a) Если да, то определите, сколько раз он отразится от зеркал (другими словами, найдите n) и найдите угол β.

b) Если нет, то опишите условия на α и φ, при которых это возможно.

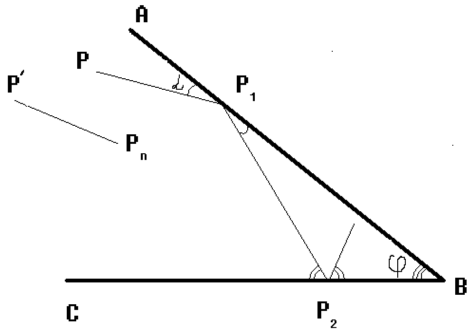


Рис. 2

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, если имеется три зеркала в некоторой конфигурации).

№ 3. «495»

Возьмите трехзначное число, в котором не все цифры равны между собой. Затем переставьте цифры так, чтобы сначала получить самое большое число, а потом так, чтобы получилось самое маленькое из возможных. Вычтите из большего из полученных чисел меньшее и повторите такую операцию с получившимся в результате числом. Затем с новым числом и т.д. Рано или поздно у вас получится число 495.

1. Докажите, не используя полный перебор, что может получиться только число 495.
2. Какое наибольшее количество действий понадобится, чтобы получить 495?
3. Исследуйте подобную задачу для четырехзначных чисел.
4. А если рассмотреть шестизначные числа?
5. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и изучите их.

Примечание. Напоминаем, что данную задачу нужно решить без полного перебора (вручную или используя компьютер)!

№ 4. КТО

Для чисел, не превосходящих 63, рассмотрим следующую систему счисления: КТО(9,7). В данной системе счисления каждое натуральное число от 1 до 63 записывается двумя цифрами: на первом месте стоит остаток от деления числа на 9, на втором месте – остаток от деления на 7. Например, число 25 в системе КТО(9,7) запишется как 74.

1. Докажите, что каждое натуральное число от 1 до 63 единственным образом представимо в системе КТО(9,7). Выпишите таблицу соответствия чисел, записанных в обычной системе и в системе КТО(9,7).

2. Операцию сложения (умножения) определим только для тех чисел, чья сумма (произведение) не превосходит 63. Покажите, что при сложении или умножении в системе КТО(9,7) не надо производить перенос разряда и поэтому не обязательно действовать слева направо.

3. Покажите, что система КТО(9,6) «плоха» и не подходит для записи чисел от 1 до 54. В частности, поясните, что можно понимать под словом «плоха».

4. Можно ли как-нибудь подправить систему КТО(9,7), чтобы она подходила для записи чисел, больших 63?

5. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их. (Например, можно попробовать похожие системы, в которых используются остатки при делении на три различных числа и т.п.)

№ 5. Лампочки

Есть две комнаты. В одной из них находятся три выключателя, в другой – три обыкновенные лампочки накаливания. Каждая лампочка присоединена к одному выключателю, но к какому именно – неизвестно. Требуется установить соответствие между выключателями и лампочками. Помощников нет, и в ту, и в другую комнату можно войти только один раз. Войдя в комнату, можно увидеть, горит лампочка, или нет, а также потрогать ее рукой – теплая она или холодная. Горящие лампочки трогать не стоит – они остывают через десять минут после выключения.

1. Как выполнить поставленную задачу?

2. Решите предложенную задачу, если лампочек не три, а семь. Войти в каждую из комнат можно только дважды.

3. Если в каждую комнату можно войти дважды, то какое наибольшее количество лампочек можно будет поставить в соответствие с выключателями?

4. Какое наименьшее количество посещений комнат нужно, если лампочек будет 15?

5. Как изменится решение, если своими действиями с выключателем мы можем гарантированно добиться того, чтобы лампочка перегорела?

6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 6. Смышленый продавец

1. Очень умный продавец получил для продажи несколько пачек наклеек по 100 наклеек в каждой. 10 наклеек он отсчитывает за 10 с. За сколько секунд он может отсчитать: а) 40 наклеек; б) 70 наклеек; в) 90 наклеек?

2. У продавца есть несколько пачек по n наклеек в каждой (n – четное и больше 60). Какое минимальное время понадобится для того, чтобы отсчитать: а) $\frac{n}{2}$; б) $\frac{n}{2}+20$ наклеек?

3. У продавца есть три пачки наклеек по 100 штук в каждой. К нему подошли трое покупателей. Первому покупателю нужно 70 наклеек, а второму и третьему – по 60 наклеек. Какое минимальное время потребуется продавцу, чтобы выполнить заказ, если за 1 секунду он отсчитывает 1 наклейку?

Приведите последовательность действий продавца, чтобы достигнуть наименьшего времени и докажите, что быстрее продавцу справиться не удастся.

4. Общая постановка. У продавца есть N пачек по n наклеек в каждой. К нему подошли k покупателей (k = 2, 3, …). Первому нужно m_1 наклеек, второму – m_2 наклеек и т.д., последнему m_k наклеек. Исследуйте вопросы пункта 3 для этой постановки (интересно рассмотреть хотя бы некоторые частные случаи).

5. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 7. Радостные клетки

1. Каждую клетку доски 10×10 нужно покрасить в один из двух цветов: синий или белый. Назовем клетку *«радостной»,* если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона).

2. Можно ли закрасить клетки квадрата 5×5 так, чтобы все клетки были *«радостными»?* Если да, то покажите, как. Если нет, то поясните почему.

3. Исследуйте подобные вопросы для различных квадратов $n\times n$ и прямоугольников $m\times n$ (m и n – натуральные числа).

4. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в белый или синий цвет. Назовем клетку «*равновесной»*, если среди ее соседних клеток поровну белых и синих клеток (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 6000 равновесных клеток? Какое наибольшее количество равновесных клеток может быть на такой доске?

5. Исследуйте вопросы пункта 4 для различных квадратов $n\times n$ и прямоугольников $m\times n$ (m и n – натуральные числа).

6. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 8. Игра «сложить или умножить»

1.1. В ряд записаны n единиц: 1 1 1 1 1 1 1…….1. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом разрешается между любыми двумя цифрами ставить знак «+» или «×». Когда все $n-1$ знаков будут поставлены, вычисляется значение полученного выражения (сначала выполняются все умножения, а затем – сложения). Если получилось четное число, то выигрывает первый, а если получилось нечетное – второй. Исследуйте, кто выиграет при правильной игре и как ему для этого надо играть.

1.2. В ряд записаны $2n$ цифр: 1 2 1 2………1 2. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом разрешается между любыми двумя цифрами поставить знак «+» или «×». Когда все $2n - 1$ знаков будут поставлены, вычисляется значение полученного выражения (сначала выполняются все умножения, а затем – сложения). Если получилось четное число, то выигрывает первый, а если получилось нечетное – второй. Исследуйте, кто выиграет при правильной игре и как ему для этого надо играть.

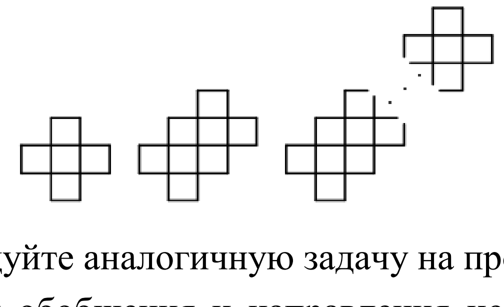
1.3. А если в пунктах 1 и 2 в ряд записаны произвольные натуральные числа?

1.4. А если допустить в ряду один или несколько нулей?

2.1. Игровое поле имеет один из видов, изображенных на рисунке (всего в нем $3n + 2$ клетки). В клетках поля стоят натуральные числа от 1 до $3n + 2$, по одному в каждой клетке. Играют двое, ходят по очереди. Каждым ходом игрок ставит между двумя соседними по стороне числами знак «+» или «×». Когда все знаки расставлены, доска разбивается на области, в каждой из которых всякая клетка связана с хотя бы одной клеткой той же области знаком умножения на их общей стороне (если на сторонах клетки не стоит ни один знак умножения, она будет такой областью, состоящей из одной клетки). Числа, стоящие в клетках области перемножаются, а затем все полученные произведения складываются. Если в результате получается четное число, то выигрывает первый игрок, в противном случае – второй. Исследуйте, кто выиграет при правильной игре и как ему для этого надо играть. (Для начала исследуйте частные случаи расстановок на ваш выбор.)

2.2. А если в клетках записаны произвольные натуральные числа?

2.3. А если допустить, что в некоторых клетках записан нуль?



3. Опишите и исследуйте аналогичную задачу на пространственных фигурах.

4. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 9. (a, b)–слоны

На шахматном поле (a, b)–слоном будем называть фигуру, делающую ходы следующего рода: она идёт по диагонали на a клеток, поворачивает на 90° в какую-либо из сторон и идёт на b клеток по перпендикулярной диагонали. Пусть слон был изначально поставлен в какую-то клетку на бесконечном во все стороны шахматном поле. Будем называть клетку начальной.

1. (а) Сколько возможных ходов из начальной клетки может сделать (a, b)–слон? (б) Верно ли, что (a, b)–слон тождественен (b, a)–слону? *Другими словами, верно ли, что множества клеток, в которые могут походить такие слоны, совпадают*? (в) Можно ли присвоить обычному слону какие-либо a и b?
2. Введите на чёрных клетках шахматного поля раскраску в два цвета: перекрасьте их так, чтобы любой ход (1, 0)–слона менял цвет клетки, на которой он стоит. При каких значениях (a, b) соответствующий слон может ходить только по клеткам одного из этих двух цветов? Как часто меняется цвет клетки, в которую приходит слон, при остальных значениях (a, b)?
3. При каких значениях t (1, t)–слон может за несколько ходов дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину? Постройте для таких t алгоритм достижения этой клетки, а для остальных докажите его невозможность.
4. Пусть слон за некоторое число ходов может достичь клетки, имеющей с начальной общую вершину. Чему тогда может быть равен НОД(a, b)?
5. Для тех значений (a, b), которые одновременно удовлетворяют условиям, полученными в пунктах 2 и 4, проверьте, может ли соответствующий (a, b)–слон попасть за несколько ходов в клетку, имеющую с начальной общую вершину. Постройте алгоритм попадания или докажите его невозможность для как можно бóльшего числа таких слонов.
6. *Слон Безу — Тьюринга*. Докажите, что если (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину, на бесконечном шахматном поле, то он может это сделать и на вертикальной/горизонтальной бесконечной ленте ширины $2\cdot(a + b)$.
7. Теперь будем пытаться дойти до клетки, отстоящей от начальной на две клетки по диагонали (располагающейся через одну, т.е. соседняя соседней). Покажите, что это можно сделать любым (1, t)–слоном. Чему может быть равен НОД(a, b), если это можно сделать (a, b)–слоном?
8. Опишите все значения (a, b), такие, что соответствующие (a, b)–слоны могут дойти до клетки, отстоящей от начальной на две по диагонали, и при этом: (а) не могут добраться до клетки, имеющей с начальной общую вершину, (б) они не являются ($2a, 2b$)–слонами, где (a, b)–слон может дойти до клетки, имеющей с начальной общую вершину.
9. Рассмотрите более общие случаи, предложите свои обобщения.

№ 10. Простые делители

Рассмотрим функцию $S(n)$, заданную на множестве натуральных чисел, такую, что $S(n)$ равно числу простых делителей числа n. Например, $S(1)=0,\quad S(7)=1,\quad S(20)=2$.

0.1. Вычислите $S(510510)$.

0.2. Является ли функция $S(n)$ монотонной (возрастающей или убывающей) и(или) ограниченной?

0.3. Верно ли, что для любых натуральных a и b выполнено $S(ab)=S(a)+S(b)$? Если нет, то найдите все значения a и b (или как можно больше таких значений), для которых это равенство верно.

0.4. Верно ли, что для любых различных натуральных значений a и b выполнено $S(a)\neq S(b)$? Верно ли, что для любого натурального m найдётся такое a, что $S(a)=m$?

0.5. Докажите что $S\left(21^l+4^{l+2}\right)>1$ для любого натурального l.

1.1. Верно ли, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a,b), таких, что $S(a+b)=S(a)+S(b)$? А если $S(a+b)>2017$?

1.2. Попробуйте привести как можно больше решений уравнения $S(a+b)=S(a)+S(b)$ в натуральных числах.

1.3. Рассмотрите другие равенства, например, $S(a+b)=S(a)S(b)$, $S(ab)=S(a)S(b)$, $S(a+b)=S(ab)$ и др.

2. Пусть для некоторого натурального n верно $S(an)=S(n)+m$, где a – некоторое фиксированное натуральное число.

2.1. Пусть $a=2017$. Какие значения может принимать m?

2.2. Аналогичный вопрос для $a=2014$.

2.3. Попробуйте получить результаты для произвольного натурального a.

3. Для пары натуральных чисел (a,b) обозначим через $\mathrm{M}_{a,b}$ следующее множество: $\{S(|ax+by|)\mid x,y\in \mathrm{Z}\}\setminus\{0\}$.

3.1. Пусть НОД$(a,b)=1$. Докажите, что множество $\mathrm{M}_{a,b}$ совпадает с множеством натуральных чисел.

3.2. Рассмотрите случай произвольной пары (a,b).

4. Исследуйте другие свойства исходной функции, а также рассмотрите новые функции, например, $S^{(2)}(n)$ – количество делителей числа n вида pq, где p и q – простые.

№ 11. Ладьи на доске

1.1. Капризная ладья бьет либо только по вертикали, либо, наоборот, только по горизонтали, зато умеет бить сквозь фигуры. Андрей ставит ладей по одной на шахматную доску. Как только капризную ладью ставят на доску, она сообщает Андрею, вдоль вертикали или горизонтали она будет бить. Андрей хочет добиться того, чтобы поставленные ладьи били все свободные клетки стандартной шахматной доски 8×8. Каким наименьшим количеством ладей он сможет обойтись, как бы ни вели себя ладьи?

1.2. Мальчик хочет поставить несколько ладей на шахматную доску так, чтобы, независимо от их настроения, оставалось непобитой не более одной свободной клетки доски. Каким наименьшим количеством ладей он сможет обойтись?

2. Андрей и Леша после шахматного кружка затеяли новую игру. Они придумали специальную фигуру – ленивую ладью. Ленивая ладья бьет только по одной линии – либо только по вертикали (и при этом не бьет по горизонтали), либо наоборот – только по горизонтали (и при этом не бьет по вертикали), зато умеет бить сквозь фигуры. Сначала Андрей расставляет ленивые ладьи по шахматной доске 8×8, а затем Леша их всех ориентирует, т.е. для каждой ладьи выбирает, по какой линии она бьет.

2.1. Андрей расставляет 50 ленивых ладей. Может ли Леша ориентировать их так, чтобы нашлась хотя бы одна свободная клетка, не побитая ни одной из ладей?

2.2. Какое минимальное количество ленивых ладей должен поставить Андрей (и как именно), чтобы при любом выборе Леши осталось непобитой не более одной свободной клетки доски 8×8?

2.3. Андрей ставит на доску 9 ленивых ладей. Какое наибольшее количество побитых клеток (свободных от ладей) Леша может обеспечить?

3. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их. В частности, рассмотрите доски размером 10×10, $n \times n$ и т.д.