Задания на Второй Минский городской открытый турнир юных математиков – 2015

(младшая лига, 5-7 классы)

12-14 марта 2015 года

Задача № 1. Точки и прямые

1) Какое наименьшее число точек нужно отметить, чтобы через них можно было провести 4 прямых? 5 прямых? N прямых?

2) На сторонах и внутри треугольника отмечены точки, как показано на рисунке 1. Какое наименьшее число точек нужно стереть, чтобы какую бы прямую ни провести (не обязательно параллельно сторонам треугольника), она содержала бы не более двух из оставшихся точек?

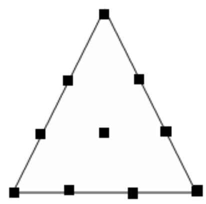

Рис. 1

3) 16 точек расположены в виде квадрата, как показано на рисунке 2. Какое наименьшее число точек нужно стереть, чтобы какую бы прямую ни провести (не обязательно параллельно сторонам квадрата), она содержала бы не более двух из оставшихся точек?

4) Тот же вопрос для 25 точек (см. рис. 3).

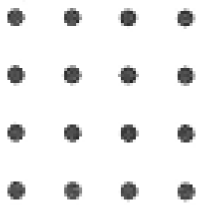

Рис. 2

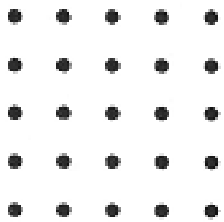

Рис. 3

5) Рассмотрите другие расположения различных количеств точек в виде треугольника, квадрата, прямоугольника или других фигур.

6) Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Задача № 2. Белоснежка и гномы

Белоснежка испекла для гномов пирог. Но из-за болезни один из семи гномов может не прийти.

Дайте ответ на следующие вопросы:

1. На какое минимальное количество кусков нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было распределить поровну между гномами? Рассмотрите два случая:

   1.1. Куски должны быть равные;

1.2. Куски не обязательно равные (в этом случае укажите массы кусков, если вес пирога равен M).

2. А если за столом может оказаться либо a гномов, либо b гномов. Начните рассмотрение с частных (конкретных) значений a и b, а затем попробуйте рассмотреть этот пункт в общем случае.

3. А если возможны разные варианты числа пришедших гномов: a_1, a_2, …, a_m (все числа a_i – натуральные).

4. А если кроме гномов может прийти Винни-Пух, и ему нужен кусок в p раз больший, чем любому из гномов (p не обязательно целое число). Вновь начните рассмотрение с частных значений p, а затем исследуйте возможность получения ответа в общем случае.

5. Предложите свои варианты возможных ситуаций и исследуйте их.

Задача № 3. Расстояния между числами

1. Расставьте все числа от 1 до 15 (каждое число используется один раз) в кружки (рис. 4) таким образом, чтобы расстояние между центрами кружков 1 и 2 было меньше, чем расстояние между центрами кружков 2 и 3, которое было бы меньше чем расстояние между центрами кружков 3 и 4 и т. д.

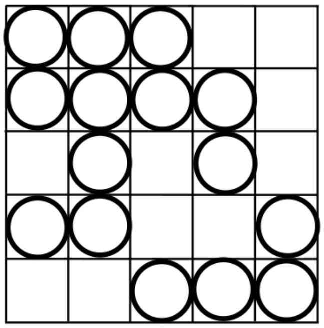

Рис. 4

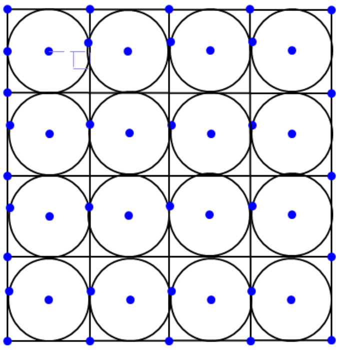

Рис. 5

2. Единственное ли решение имеет задача из пункта 1 (можно ли расставить числа в кружочки другим способом)?

3. Используя таблицу 4×4 (рис. 5), расставьте как можно больше чисел (от 1 до m) по условиям пункта 2, при этом все кружки использовать необязательно. Докажите, что полученное число m является наибольшим.

4. Предложите свои обобщения задачи и исследуйте их.

Задача № 4. Вся королевская рать

1) На шахматной доске размером 8×8 два игрока по очереди выставляют королей так, чтобы они не били друг друга. Запас королей у игроков неограничен. Король бьет фигуру в соседней клетке (по стороне и диагонали). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (каждый старается играть наилучшим образом)?

2) Тот же вопрос, если доска имеет размер 9×9.

3) Опишите стратегии выигрышной игры, если размеры доски – нечетные числа, и если размеры – четные.

4) На шахматной доске размером 8×8 два игрока по очереди выставляют одинаковые фигуры так, чтобы они не били друг друга. Запас фигур у игроков неограничен. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (каждый старается играть наилучшим образом)? Решите данный пункт, если фигуры: а) ладьи, б) ферзи.

5) Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Задача № 5. Частицы

На оси Ox находятся несколько частиц. Каждую секунду каждая частица делится на 2 равные части (по массе равные исходной), первая часть располагается на 1 левее соответствующей частицы, а вторая – на 1 правее. Если в одну точку попадают две частицы, то их масса складывается.

Допустим, что в начальный момент времени на оси находится только одна частица массы 1 в точке m (здесь и далее все значения точек целые).

1) Найти массу, которая будет находиться в точке k через n секунд (рассмотрите все точки, в которых окажется ненулевая масса).

2) Как изменится ответ, если в точке 0 находится поглощающий экран, т.е. все частицы, попавшие в эту точку, уничтожаются?

3) Как изменится ответ, если в точке 0 находится отражающий экран, т.е. частица, попавшая в 0, на следующем шаге не делится, а попадает в точку 1?

4) Как изменится ответ, если в точке 0 находится полупрозрачная мембрана: частица, попавшая в 0, делится на две в пропорции $p : q$, первая попадает в -1, а вторая в 1?

5) Что происходит, если в точках 0 и d находятся отражающие экраны, или поглощающие экраны, или один поглощающий экран, а другой отражающий?

6) Предложите свои обобщения и исследуйте их.

Задача № 6. Сетка

1) Ребра сетки хотят покрасить в два цвета — синий и зеленый – так, чтобы у любого узла было ровно два зеленых ребра. Можно ли так покрасить сетку 8×8 (выглядит как квадрат 7×7)?

2) Можно ли это сделать с сеткой 9×9?

3) Чему будет равно количество зеленых ребер в сетке $n\times n$, если известно, что ее можно покрасить таким образом?

4) Придумайте критерий, позволяющий определить, можно ли так покрасить сетку $m\times n$.

5) Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Задача № 7. Сюрреалистический волк

1. [*Раз, два, три, четыре…*] В одной из вершин куба сидит волк, но охотникам он не виден. N охотников стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые N вершин куба. Если они не попадают в волка, то до следующего залпа волк перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в волка за наименьшее количество залпов. Решите задачу для $N = 6, 5, 4, 3, 2$.

2. [*Матерый волк*] Ситуация та же, но волк может перебежать в соседнюю вершину, а может и остаться на месте. а) Покажите как 5 охотников могут гарантированно убить волка. б) Сколько им для этого потребуется выстрелов? (Интересует наименьшее число выстрелов.) в) Докажите, что 4 охотника не смогут убить волка за конечное число выстрелов.

3. [*Крыша едет дальше…*] Решите аналогичные задачи для тетраэдра, октаэдра, других многогранников; для четырехмерного куба, пятимерного куба и т.д.

4. Решите пункты 1–3 при условии, что волков 2, 3, 4 (два и более волка не могут находится в одной вершине; все волки должны быть убиты).

5. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

Задача № 8. Универсальное число

I. Универсальным числом $U(n)$ назовем минимальное натуральное число, из десятичной записи которого вычеркиванием цифр можно получить десятичную запись любого натурального числа, не превосходящего n.

1) Чему равно $U(10)$?

2) Чему равно $U(20)$?

3) Сколько цифр в десятичной записи $U(100)$?

4) Сколько цифр в десятичной записи $U(2015)$?

II. Дано натуральное число n. Последовательность натуральных чисел назовем универсальной для данного n, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую перестановку чисел 1, 2, …, n. Например, последовательность (1, 2, 3, 1, 2, 1, 3) является универсальной для $n = 3$, а последовательность (1, 2, 3, 2, 1, 3, 1) не универсальна, так как из нее никаким вычеркиванием нельзя получить перестановку (3, 1, 2). Для $n = 4$

1. Приведите пример универсальной последовательности из 16 членов.

2. Приведите пример универсальной последовательности из 13 членов.

3. Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее, чем из 10 членов.

4. Докажите, что при $n = 4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

5. Ответьте на вопросы, аналогичные вопросам пунктов 1–3, для произвольного n.

6. Для различных n найдите самые короткие универсальные последовательности.

7. Предложите свои обобщения и исследуйте их.

Задача № 9. Сигнальные флажки

1. На корабле имеется 10 разноцветных сигнальных флажков. Для того, чтобы подать сигнал, необходимо вывесить некоторые из этих флажков на сигнальной мачте, причем значение сигнала зависит от порядка следования флажков.
   - 1.1. Сколько всего сигналов может быть подано? Решите задачу, если а) для подачи сигнала необходимо использовать все 10 флажков; б) для подачи сигнала можно использовать любое количество флажков от 1 до 10.
   - 1.2. Предположим теперь, что на корабле имеется две сигнальные мачты. Соответственно, значение сигнала зависит не только от порядка расположения флажков на мачте, но и от того, каким образом флажки распределены по двум мачтам. Сколько всего сигналов может быть подано? Решите задачу, если а) для подачи сигнала необходимо использовать все 10 флажков; б) для подачи сигнала можно использовать любое количество флажков от 1 до 10.
   - 1.3. Решите предыдущую задачу в случае, когда имеется n разноцветных флажков и k сигнальных мачт.
2. Пусть имеется 3 сигнальные мачты и 20 флажков синего цвета.
   - 2.1. Сколько всего сигналов может быть подано? Решите задачу, если а) для подачи сигнала необходимо использовать все 20 флажков; б) для подачи сигнала можно использовать любое количество флажков от 1 до 20.
   - 2.2. Пусть имеется 3 сигнальные мачты, 10 флажков красного цвета и 10 флажков синего цвета. Сколько всевозможных сигналов может быть подано, если необходимо использовать все флажки?
   - 2.3. Решите предыдущую задачу, если имеется n флажков синего цвета, m флажков красного цвета и k сигнальных мачт. Как и в предыдущей задаче, будем предполагать, что для подачи сигнала необходимо использовать все флажки.
3. Пусть имеется 3 сигнальные мачты и 10 разноцветных сигнальных флажков. Сигнал называется *важным,* если для того, чтобы его подать, необходимо, чтобы на каждой мачте висел хотя бы один флажок.
   - 3.1. Сколько всего *важных* сигналов можно подать? Решите задачу, если а) для подачи сигнала необходимо использовать все 10 флажков; б) для подачи сигналов можно использовать любое количество флажков от 1 до 10.
   - 3.2. Пусть имеется 3 сигнальные мачты и 20 флажков синего цвета. Сколько всевозможных *важных* сигналов может быть подано, если необходимо использовать все флажки?
   - 3.3. Пусть имеется 3 сигнальные мачты, 10 флажков синего цвета и 10 флажков красного цвета. Сколько всевозможных *важных* сигналов может быть подано, если необходимо использовать все флажки?

3.4. Решите предыдущую задачу, если имеется n флажков синего цвета, m флажков красного цвета и k сигнальных мачт. Как и в предыдущей задаче, будем предполагать, что для подачи сигнала необходимо использовать все флажки.

4. Придумайте свои обобщения к задаче и исследуйте их.

Задача № 10. Переливания – 2

1) *Начальная постановка*. Имеется три одинаковых стакана с водой объемом 1 литр: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть. Разрешается переливать воду из одного стакана в другой полностью (если вся вода поместится) или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока тот не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным. Какие объемы воды можно получить в каком-то из стаканов, выполняя описанные операции?

2) *Более сложная постановка*. Имеется семь одинаковых стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть, четвертый – на одну пятую, пятый – на одну восьмую, шестой – на одну девятую и седьмой – на одну десятую. Разрешается переливать воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока тот не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным:

а) на одну двенадцатую;

б) на одну шестую;

Общий вопрос: какие численные значения объема воды можно получить в этом случае?

3) *Общая постановка*. Пусть имеется несколько одинаковых сосудов с (три, четыре, пять, …) с объемом 1, наполненных на p_1, p_2, p_3, …, жидкостью (все $p_i \in Q$, $0 < p_i < 1$). Найти все множество значений m/n такие, что можно некоторой последовательностью переливаний получить сосуд, заполненный на m/n ($0 < m/n < 1$, $m, n \in N$).

4) *Обобщения*. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.