

**ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**  
**Белорусского государственного университета**  
приглашает к участию  
в олимпиадах по математике и информатике

**XXVII ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ**

*Условия задач первого тура олимпиады  
по математике и информатике*

**Задачи для учащихся 11 классов** («Абитуриент БГУ – 2018»)

1. Найдите главный период функции  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ .
2. Решите уравнение:  $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{2-y^2} + z\sqrt{3-z^2} = 3$ .
3. В треугольнике  $ABC$  величины углов  $A, B$  и  $C$  составляют арифметическую прогрессию. Длина наименьшей стороны в 4 раза меньше наибольшей стороны. Найдите тангенс наименьшего угла.
4. Найдите наибольшее значение выражения  $x - 2y$ , если  $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ .
5. Пункт  $A$  находится на берегу реки, ширина которой 400 м, скорость течения  $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ . Пункт  $B$  расположен ниже пункта  $A$  по течению реки на 4 км и еще на расстоянии 2 км 680 м от берега ( $A$  и  $B$  – по разные стороны реки, но  $B$  – не на берегу реки). Турист выехал из  $A$  на лодке, пересек реку, оставил на берегу лодку, дошел до  $B$  и вернулся тем же путем. На всех участках, по реке и по суше, он двигался прямолинейно. Скорость лодки в стоячей воде  $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ , скорость передвижения туриста пешком  $3,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ . За какое наименьшее время мог совершить свое путешествие турист?
6. Антон и Борис увлечены новой игрой, суть которой заключается в следующем. Один из игроков, по жребию, становится ведущим. Ведущий придумывает четырёхзначное слово (возможно, с нулями в старших разрядах) и передаёт ход другому игроку. В дальнейшем игроки делают ходы по очереди. Выполняя ход, игрок может увеличить одну из цифр текущего числа на 1, 2 или 3. Естественно, новое значение этой цифры не должно превосходить девяти. Игрок, получивший в результате хода число 9999, проигрывает.  
Определите, выиграет ли ведущий игрок при заданном начальном числе, если в процессе игры ни Антон, ни Борис не будут совершать ошибок.  
1) Решите эту задачу, если ведущий придумал числа: а) 9989, б) 9995, в) 9696, г) 8899.  
2) Придумайте алгоритм решения этой задачи для произвольного начального числа.

### Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Пусть  $xuz = 1$  и  $a = x + \frac{1}{x}$ ,  $b = y + \frac{1}{y}$ ,  $c = z + \frac{1}{z}$ . Вычислите все возможные значения выражения  $a^2 + b^2 + c^2 - abc$ .
2. Дракон, похищая принцесс, предлагает им сыграть в следующую игру. Он расставляет все натуральные числа от 1 до  $n^2$ , где  $n > 1$ , в клетки таблицы размером  $n \times n$ . Принцесса должна вычеркнуть строку и столбец так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четной. Если она сможет это сделать, то дракон ее освободит. Честно ли играет дракон? (Т.е. всегда ли выполнимо такое задание?)
3. Решите уравнение:  $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{2-y^2} + z\sqrt{3-z^2} = 3$ .
4. Боковые стороны трапеции относятся как 1:2, а сумма углов при большем основании равна  $120^\circ$ . Найдите углы данной трапеции.
5. Известно, что длина каждой биссектрисы треугольника не превосходит 1. Найдите наибольшее значение площади треугольника.
6. Антон и Борис увлечены новой игрой, суть которой заключается в следующем. Один из игроков, по жребию, становится ведущим. Ведущий придумывает четырёхзначное слово (возможно, с нулями в старших разрядах) и передаёт ход другому игроку. В дальнейшем игроки делают ходы по очереди. Выполняя ход, игрок может увеличить одну из цифр текущего числа на 1, 2 или 3. Естественно, новое значение этой цифры не должно превосходить девяти. Игрок, получивший в результате хода число 9999, проигрывает.  
Определите, выиграет ли ведущий игрок при заданном начальном числе, если в процессе игры ни Антон, ни Борис не будут совершать ошибок.  
1) Решите эту задачу, если ведущий придумал числа: а) 9989, б) 9995, в) 9696, г) 8899.  
2) Придумайте алгоритм решения этой задачи для произвольного начального числа.

### Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

1. Можно ли выложить все 28 костей домино так, чтобы а) на одном конце оказалась 6, а на другом 5; б) на обоих концах была 6? Ответы обоснуйте.
2. Даны 20 различных натуральных чисел, меньших некоторого значения  $N$ .
  - а) Докажите, что если  $N = 60$ , то среди попарных положительных разностей этих чисел обязательно найдутся четыре одинаковых.
  - б) Решите эту же задачу при  $N = 66$ .
  - в) Решите эту же задачу при  $N = 70$ .
3. В классе учатся 12 юношей и 10 девушек.
  - а) Сколькими способами можно сформировать пару юноша-девушка?
  - б) Сколькими способами можно сформировать команду, состоящую из трех юношей и трех девушек?
  - в) Сколько существует различных способов расставить 5 юношей и 5 девушек этого класса в шеренгу так, чтобы никакие двое юношей не стояли рядом?
4. Пусть  $xuz = 1$  и  $a = x + \frac{1}{x}$ ,  $b = y + \frac{1}{y}$ ,  $c = z + \frac{1}{z}$ . Вычислите все возможные значения выражения  $a^2 + b^2 + c^2 - abc$ .

5. В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ :  $\angle A = \angle A_1$ ; равны высоты, проведенные из вершин  $B$  и  $B_1$ ; равны медианы, проведенные из вершин  $C$  и  $C_1$ . Обязательно ли эти треугольники равны?

6. Антон и Борис увлечены новой игрой, суть которой заключается в следующем. Один из игроков, по жребию, становится ведущим. Ведущий придумывает трёхзначное слово (возможно, с нулями в старших разрядах) и передаёт ход другому игроку. В дальнейшем игроки делают ходы по очереди. Выполняя ход, игрок может увеличить одну из цифр текущего числа на 1, 2 или 3. Естественно, новое значение этой цифры не должно превосходить девяти. Игрок, получивший в результате хода число 999, проигрывает.

Определите, выиграет ли ведущий игрок при заданном начальном числе, если в процессе игры ни Антон, ни Борис не будут совершать ошибок.

1) Решите эту задачу, если ведущий придумал числа: а) 989, б) 995, в) 696, г) 889.

2) Попробуйте описать множество трехзначных чисел, для которых у ведущего есть выигрышная стратегия, и как ему тогда надо играть.