

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

*Условия задач первого тура олимпиады
по математике и информатике*

Задачи для учащихся **11** классов («Абитуриент БГУ – 2016»)

1. Найти $\frac{\sin 5x}{\sin x}$, если $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{6}{5}$.
2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y, \\ (xy)^2 + xy + 1 = 13y^2. \end{cases}$$
3. Для положительных a, b и c доказать неравенство
$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$
4. Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ до пункта B , отстоящего от A на расстоянии 24.5 км . В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на $54 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью $v \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Какова должна быть скорость v , чтобы автомобиль быстрее всего проехал путь от A до остановки и обратно до A указанным способом?
5. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. На стороне AB выбрана такая точка M , что $BM < BC$. При этом окружность, описанная около треугольника AMI , пересекает сторону AC в точке L , отличной от A и C . Доказать, что $BM + CL = BC$.
6. Описать алгоритм, по которому можно найти число, состоящее из нулей и двоек и делящееся на 2016.

Задачи для учащихся **9-10** классов (творческая олимпиада по математике)

1. Рассмотрим следующую числовую последовательность:
 $12 + 34, 56 + 78, 910 + 1112, 1314 + 1516, \dots, 20132014 + 20152016$.
Сколько чисел в этой последовательности делятся на 4? А на 3?
2. Однажды Дядя Федор, кот Матроскин и Шарик пошли на рыбалку. Улов оказался большим. Дядя Федор поймал половину от общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали вместе кот Матроскин и Шарик. Кот Матроскин поймал треть от общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали вместе Дядя Федор и Шарик. Улов Шарика отличается от улова Матроскина на 1 кг. Сколько весил общий улов?

3. Для положительных a, b и c доказать неравенство

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

4. Укажите все точки плоскости (x, y) , через которые не проходит ни одна из кривых семейства

$$y = p^2 + (4 - 2p)x - x^2, \quad p \in \mathbb{R}.$$

5. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. На стороне AB выбрана такая точка M , что $BM < BC$. При этом окружность, описанная около треугольника AMI , пересекает сторону AC в точке L , отличной от A и C . Доказать, что $BM + CL = BC$.
6. Описать алгоритм, по которому можно найти число, состоящее из нулей и двоек и делящееся на 2016.

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

- а) 21 человек собрали 200 орехов. Обязательно ли найдутся два человека, собравшие поровну орехов?
б) 100 человек собрали m орехов. Найдите минимальное m , такое что обязательно найдутся два человека, собравшие поровну орехов?
в) n человек собрали 2016 орехов. Найдите максимальное n , такое что обязательно найдутся два человека, собравшие поровну орехов?
- Докажите, что в любом году найдется пятница, приходящаяся на 13-е число.
- Четырехзначное число назовем интересным, если его сумма цифр равна удвоенной разности между 2016 и самим числом. Найдите все интересные числа.
- Однажды Дядя Федор, кот Матроскин и Шарик пошли на рыбалку. Улов оказался большим. Дядя Федор поймал половину от общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали вместе кот Матроскин и Шарик. Кот Матроскин поймал треть от общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали вместе Дядя Федор и Шарик. Улов Шарика отличается от улова Матроскина на 1 кг. Сколько весил общий улов?
- Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Имеются 552 гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г (каждая по одному разу). Разложите их на три равные по весу кучки (опишите, как вы это будете делать, или предложите алгоритм, с помощью которого можно сделать такое разложение).