Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике
ФПМИ БГУ – 2014

7-8 класс

1. [2] В течение года цены на хоккейные шайбы поднимали два раза: на 50,011%, а затем на 49,989%. После чемпионата мира по хоккею шайбы будут продавать за полцены. Сколько будет стоить одна шайба после чемпионата мира, если в начале года она стоила 20000 рублей?

Ответ: 22499,999879

Решение: После двух повышений и удешевления стоимость одной шайбы окажется равна: 20 000×1,50011×1,49989 / 2 = 20 000×(1,5+0,00011)× (1,5-0,00011) / 2 = 10 000 (2,25 - 0,0000000121) = 22 499,999879 руб.

2. а) [1] Расстояние между городами А и В равно 99 км. На каждом километре стоят километровые столбы, на которых висят таблички с указанием расстояний до обоих городов: (0; 99), (1; 98), (2; 97), …, (98; 1), (99; 0). Сколько из табличек содержат только две различные цифры?

б) [3] Тот же вопрос для городов, расстояние между которыми равно 999 км.

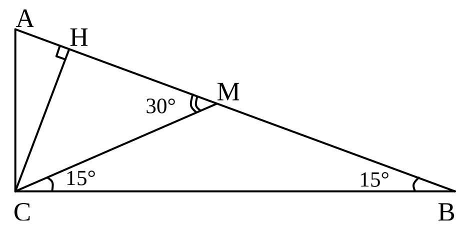
Ответ: а) 20, б) 40

Решение: а) 10 решений очевидны: (0;99), (11;88), (22;77), …, (99;0). Если же рассмотреть таблички вида $(\overline{ab};\overline{9-a,9-b})$, где $a \neq b$, то ясно, что $a \neq 9-a$, иначе $2a=9$,и, значит, $a=9-b$, т.е. $a+b=9$, $a=0,1,2,..9$. Отсюда еще десять решений
$(9;90), (18;81), (18,81), \quad (27,72),\ldots,(90,9)$. Итого, ответ: 20.

б) Ясно, что если в табличке указаны числа $(\overline{xyz};\overline{x_1y_1z_1})$ (где x, y, z −цифры), то $\overline{x_1y_1z_1} = 999 - \overline{xyz}$ и, значит, $z_1 = 9-z, y_1 = 9-y, x_1 = 9-x.$. (Если $x=9$ или $x=y=9$, то цифры $x_1 = 0,$ или $x_1 = y_1 = 0$ в табличке не проставляются.) Отсюда сразу следует, что если $x=y=z$ (и, значит, $x_1 = y_1 = z_1 = 9-x$), то наши условия будут выполнены; это дает 10 удовлетворяющих условию задачи табличек (отвечающих расстояниям 000 = 000, 111, 222, …,999 км от пункта А). Если же число $\overline{xyz}$ записывается двумя разными цифрами, то эти цифры должны быть таковы, что каждая из них дополняет вторую до числа 9 − в этом случае и число $\overline{x_1y_1z_1} = \overline{9-x,9-y,9-z}$ будет записываться теми же цифрами. Подобных пар цифр существует, очевидно пять: $(0,9),(1,8),(2,7),(3,6)\,и\,(4,5)$; а трехзначных чисел, записывающихся двумя данными цифрами (a) и (b), имеется всего шесть: три из них записываются двумя цифрами a и одной цифрой b (которая может занимать любое из 3-х имеющихся мест) и, аналогично, три числа записываются одной цифрой a и двумя цифрами b. Таким образом, мы получаем еще $5 \cdot 6 = 30$ удовлетворяющих условию задачи расстояний искомого столба от пункта A; поэтому общее число удовлетворяющих сформулированным требованиям табличек: $10+30=40$.

3. [5] Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

Ответ: *AB* = 4



Решение: Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол ABC равен 15°, высота $CH = 1$(см. рис). Проведем медиану CM. Она разбивает треугольник ABC на два равнобедренных треугольника AMC и BMC, причем $AM = CM = MB$. Но тогда $\angle MCB = 15°$, $\angle AMC = 30°$ (внешний для ΔBMC, а значит гипотенуза CM прямоугольного треугольника $CHM = 2$. Окончательно получаем: $AB = AM + MB = 4$.

4. [5] Решите уравнение: 13[x]+20{x}=2014.

Примечание. [x] означает целую часть числа x, т.е. это наибольшее целое число, не превосходящее x (например [3,2] = [3,8] = 3). {x} – дробная часть числа x, определяемая {x} = x – [x] (например {3,2} = 0,2 и {3,8} = 0,8).

Ответ: $x = 154{,}6$

Решение: Заметим, что для любого числа x его дробная часть удовлетворяет неравенствам $0 \le \{x\} < 1$, а значит $0 \le 20 \cdot \{x\} < 20$. Но тогда x должно быть таким что $1994 < 13 \cdot [x] \le 2014$. Но среди чисел 1995,1996,...2014 только одно число 2002 делится нацело на 13 (это легко увидеть, проследив за остатками при делении на 13 чисел 1995,1996 и т.д.). Но тогда единственный ответ получится, исходя из того, что $[x] = \dfrac{2002}{13} = 154$; $20 \cdot \{x\} = 12$, т.е. $\{x\} = 0{,}6$, а $x = 154{,}6$.

5. а) [1] Рассмотрим числа 1, 11, 111, 1111, 11111, … . Докажите, что среди них найдутся два числа, разность которых делится на 2014.

б) [1] Докажите, что существует число, записываемое только единицами и нулями и кратное 2014.

в) [4] Докажите, что для любого натурального числа a найдется такое натуральное число b, что произведение ab записывается в десятичной системе счисления одними единицами и нулями.

Решение: а) Следует из принципа Дирихле, ибо при делении чисел 1, 11, 111, 1111, … на 2014 будет не более 2014 различных остатков (на самом деле не более 1007, так как все остатки нечетные). Поэтому найдутся два числа требуемого вида, дающие одинаковые остатки:

$$11\ldots1 = 2014 \cdot s + r$$
$$11111\ldots1111 = 2014 \cdot t + r.$$

Но тогда разность этих чисел, имеющая вид 111…100…0, делится на 2014.

Отсюда сразу же получим решение пункта б).

в) Пункты а) и б) подсказывают решение пункта в), ибо для любого a найдется число вида 111…10...0 делящееся на a, но тогда

$$111\ldots10\ldots0 = a \cdot b$$

для какого-то b, что и требовалось доказать.

6. Сколькими способами из полной колоды карт (52 карты) можно выбрать

а) [2] 4 карты разных мастей и достоинств?

б) [2] 4 карты разных мастей, среди которых ровно два туза?

в) [2] 3 карты разных мастей, среди которых не более одного туза?

Ответ: а) 17610, б) 864, в) 8640.

Решение: а) Зафиксируем четыре масти. Первую карту первой масти можно выбрать 13 способами, следующую карту второй масти – 12 способами и т.д. Итого $13 \times 12 \times 11 \times 10 = {}$ $= 17\,610$ способов.

б) два туза из четырех выбираем 6 способами, две оставшиеся карты – 12×12 способами. Итого $6 \times 12 \times 12 = 864$.

в) Вначале посчитаем, сколькими способами можно выбрать три карты без тузов, затем три карты с ровно одним тузом и сложим полученные результаты.

Если тузов нет, то три масти (из четырех возможных) выбираем 4 способами, а карты этих мастей – $12 \times 12 \times 12$ способами. Итого – $4 \times 12 \times 12 \times 12$.

Один туз – 4 способа, две масти из трех оставшихся – 3 способа, две карты (не туза) – 12×12. Итого $4 \times 12 \times 12 \times 12 + 4 \times 3 \times 12 \times 12 = 5 \times 12 \times 12 \times 12 = 8640$.